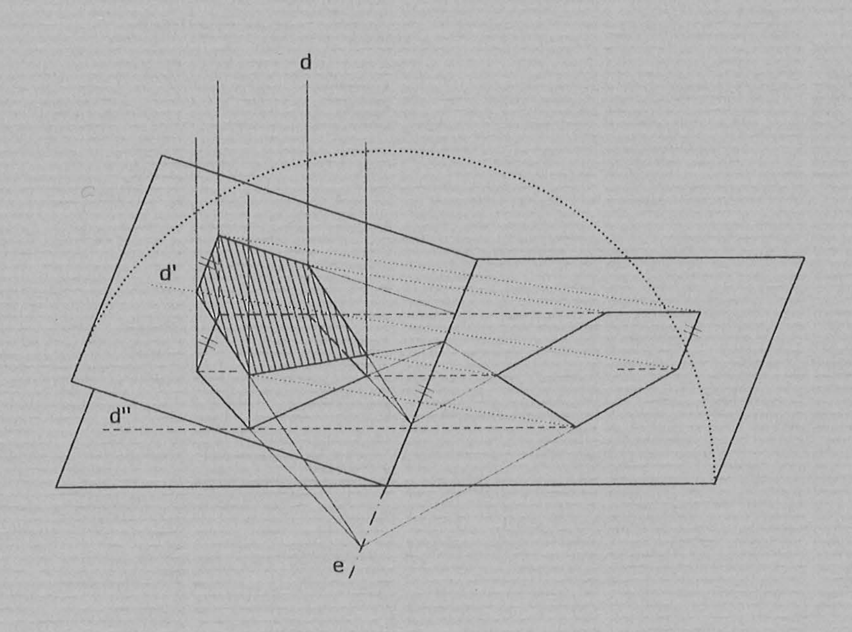
EJERCICIOS DE GEOMETRÍA:

APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES HOMOLÓGICAS

Por

ISABEL GÓMEZ SÁNCHEZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

5-68-01

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA:

APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES HOMOLÓGICAS

Por

ISABEL GÓMEZ SÁNCHEZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

5-68-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

5 Área
68 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA:
APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES HOMOLÓGICAS

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 216.01/ 5-68-01
ISBN-13: 978-84-9728-200-0
ISBN-10: 84-9728-200-0
Depósito Legal: M-25150-2006

El presente cuaderno reúne distintos tipos de problemas que se pueden resolver utilizando una metodología común, puesto que en todos ellos es posible definir una misma transformación geométrica: la homología. No pretende realizar una descripción pormenorizada de casos, sino recopilar ejemplos de ejercicios que ponen de manifiesto la utilidad del empleo de este tipo de transformaciones.
Se presentan ejercicios resueltos, con algunas explicaciones teóricas, en ocasiones tan sólo gráficas, que hacen referencia a algunos conocimientos previos necesarios para poder resolverlos; y a continuación se proponen otros similares como práctica para consolidar conceptos. Es por tanto un cuaderno teórico-práctico destinado fundamentalmente a repasar y afianzar estos conceptos.
Las explicaciones buscan en todo caso la mayor operatividad y simplificación posibles, los consejos prácticos y su utilidad para el dibujo arquitectónico.

La homología es aplicable en todas las operaciones que implican tanto el abatimiento de formas planas como las secciones de cualquier tipo de radiación. Se utiliza por tanto para determinar verdaderas magnitudes de secciones o figuras planas, pero igualmente para la representación perspectiva.

De hecho, los sistemas de representación emplean la proyección y la sección plana como fundamento para la representación en el papel de las figuras tridimensionales.
Cuatro de los cinco grupos de sistemas que manejamos habitualmente utilizan la proyección cilíndrica (sistemas diédrico, de planos acotados y axonometrías ortogonales y oblicuas) y uno emplea la proyección cónica (el sistema del mismo nombre). En el primer caso los ejercicios se resuelven utilizando la afinidad (homología afín); en el segundo, la homología. Aunque se trata en realidad de una misma transformación geométrica, puesto que la única diferencia que existe entre ellas consiste en que el vértice desde el que se proyecta es un punto propio en la homología e impropio (definido por una dirección) en la afinidad.

Transformación que por otro lado es muy sencilla y permite resolver problemas aparentemente distintos sin necesidad de aprender 'métodos' específicos. Podríamos decir, utilizando una expresión coloquial, que es cuanto menos 'rentable' emplearla con soltura, y a ello esperamos contribuir con este cuaderno. Confiamos en que el alumno tome conciencia de la importancia que tiene comprender la interpretación espacial de la representación plana, la analogía de las operaciones geométricas que se realizan en los distintos sistemas de representación y la utilidad del manejo de las transformaciones homológicas.

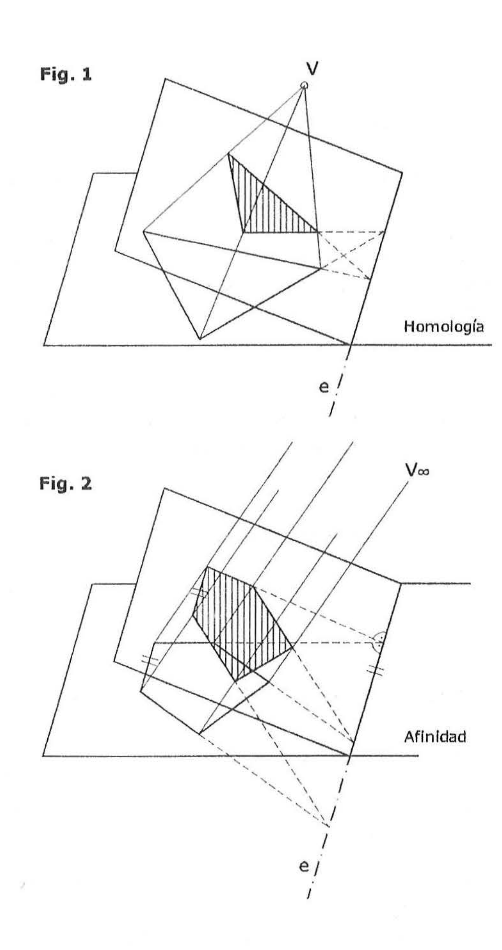


Fig. 1

Fig. 2

1. Transformaciones homológicas

La proyección de una figura desde un punto (propio o impropio) es una radiación (pirámide o prisma respectivamente).

Dos secciones planas no paralelas de una misma radiación son figuras homológicas (1). Si los planos secantes fueran paralelos, se trataría de figuras semejantes o iguales respectivamente.

La homología es una transformación que cumple las siguientes propiedades:
- Los puntos homólogos están alineados con el vértice desde el que se proyecta (el centro de la homología);
- Las rectas homólogas se cortan en una recta, el eje, intersección de los planos secantes.

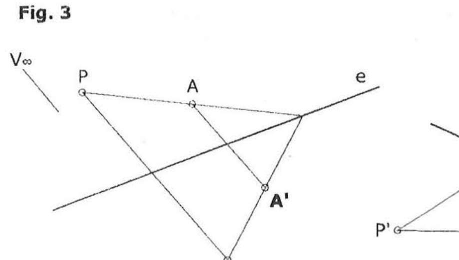
De lo cual se deducen algunas consecuencias simples:
- Los puntos del eje son dobles;
- Las rectas que pasan por el vértice se transforman en sí mismas (aunque sólo su punto del eje es doble);
- La transformada de una recta paralela al eje también lo es.

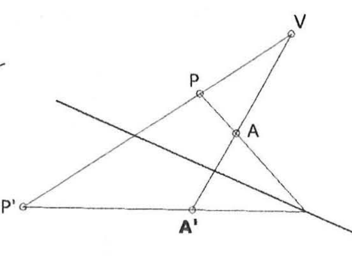
Para definir una homología hay que definir los planos secantes (conociendo tres pares de puntos homólogos, o el eje y un par).

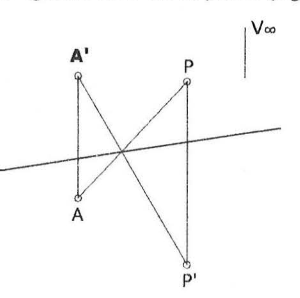
La obtención de figuras homológicas es muy sencilla. Se dibujan rectas que unan puntos homólogos conocidos para obtener los transformados de los buscados, sin más que tener en cuenta las reglas anteriores.

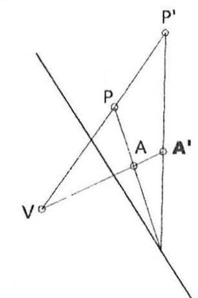
Y obsérvese que las propiedades de la transformación se cumplen en el espacio (figs. 1 y 2) pero igualmente en el plano (fig. 3).

Fig. 3



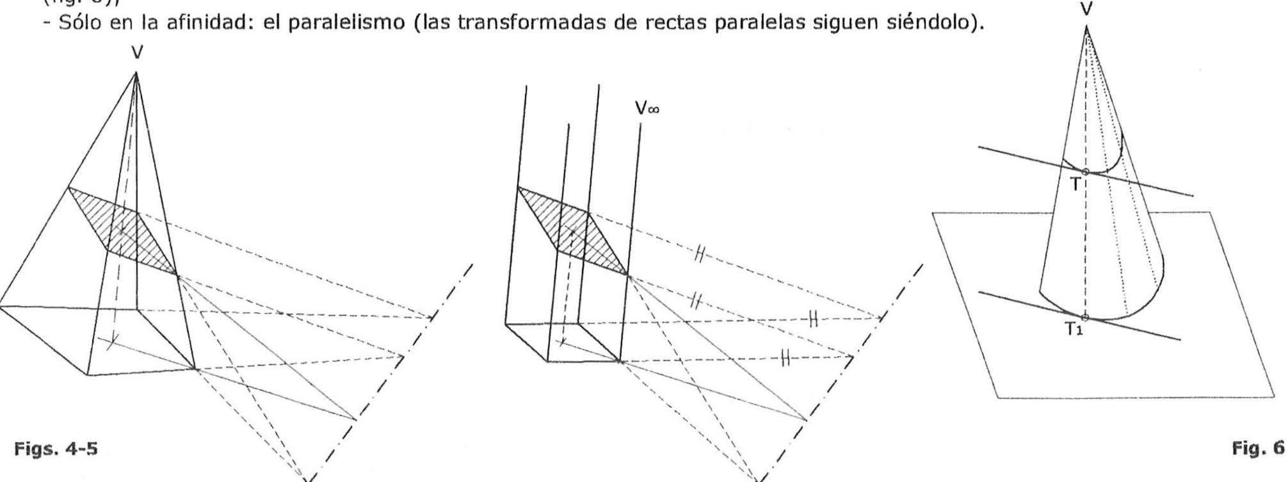






Invariantes de las homologías

En figs. 4 y 5 se han dibujado las figuras homólogas (homológica y afín respectivamente) de un cuadrado.
Permiten observar algunas propiedades geométricas que se conservan en la transformación (invariantes):
- En ambos casos: la incidencia (la proyección de un punto de una recta está sobre la proyección de ésta), la intersección (si dos rectas se cortan, sus proyecciones se cortan en la proyección del punto intersección) y la tangencia (fig. 6);
- Sólo en la afinidad: el paralelismo (las transformadas de rectas paralelas siguen siéndolo).

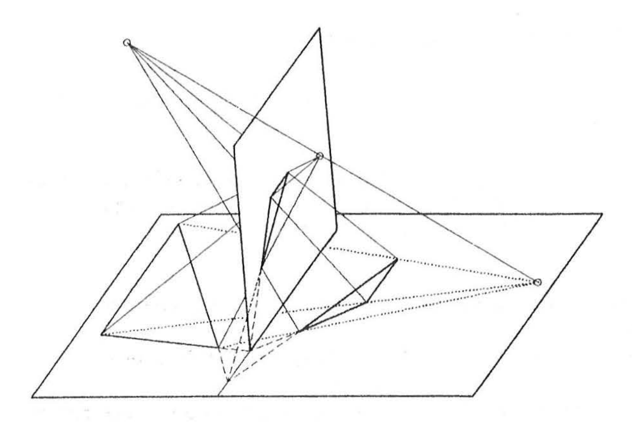


Figs. 4-5

Fig. 6

(1) La afinidad (homología afín) es en realidad un caso particular de homología, pero utilizaremos el término homología para hacer referencia a la radiación de vértice propio y afinidad para la de vértice impropio.

Fig. 7

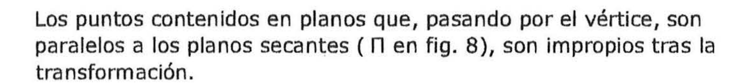


Teorema de las tres homologías

En fig. 7 se observa cómo no solo existen homologías espaciales entre la figura contenida en un plano (por ejemplo el vertical) y sus proyecciones (que no son sino la intersección con un plano de las correspondienters radiaciones) sobre otros, en este caso sobre el horizontal. También las proyecciones están relacionadas por una homología definida en su plano y cuyo centro está alineado con los centros de las respectivas homologías espaciales.

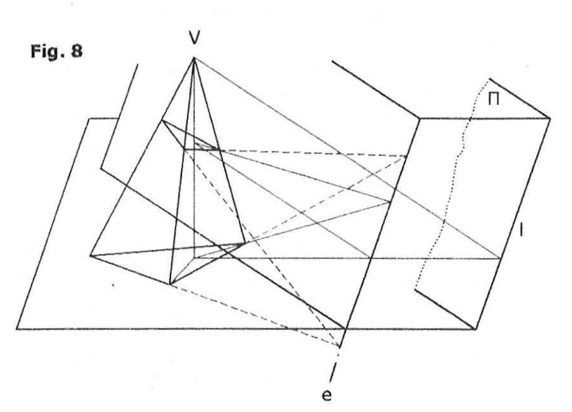
En todos aquellos casos en que sea necesario relacionar las secciones de una misma radiación podemos definir la homología correspondiente y resolver problemas geométricos.

Elementos impropios de la homología



Los puntos contenidos en planos que, pasando por el vértice, son paralelos a los planos secantes (Π en fig. 8), son impropios tras la transformación.

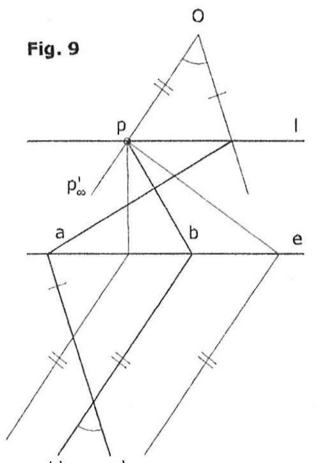
Fig. 8



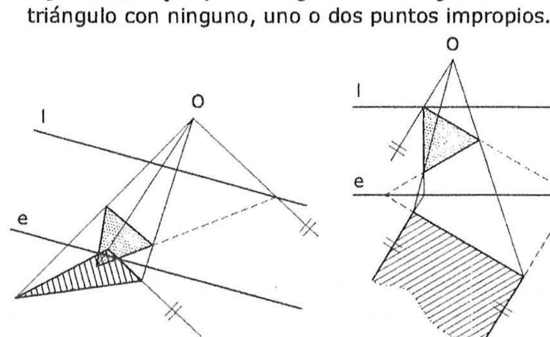
Rectas límite: intersección del plano impropio (paralelo por *V* al plano secante) con el plano de proyección. En proyección plana, el lugar geométrico de los puntos impropios.
Cada recta límite equivale a dos pares de puntos homólogos, por lo que también puede definirse una homología mediante el eje, el vértice y una cualquiera de las rectas límite.

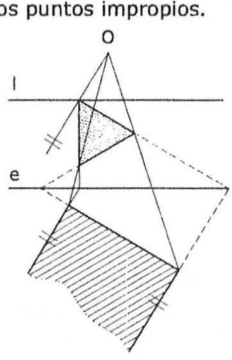
Todas las rectas que convergen en un punto de la recta límite (*P* en fig. 9) son paralelas tras la transformación, pues comparten el punto impropio *P'*∞. Según esto, las homólogas de dos rectas *a* y *b* forman un ángulo igual al determinado por el centro de la homología (*O*) y los respectivos puntos límite de las rectas.

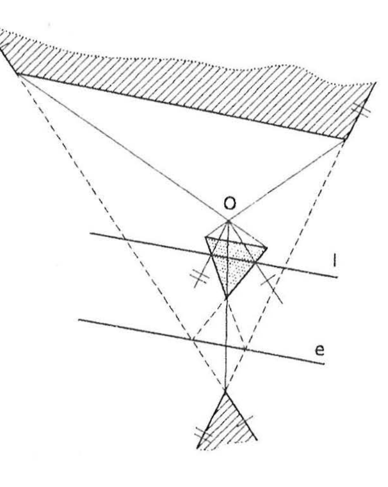
Fig. 9



Figs. 10-12. Ejemplos de figuras homológicas: triángulo con ninguno, uno o dos puntos impropios.







Ejercicios resueltos

1-2. Figuras homológicas de un cuadrado con puntos impropios.

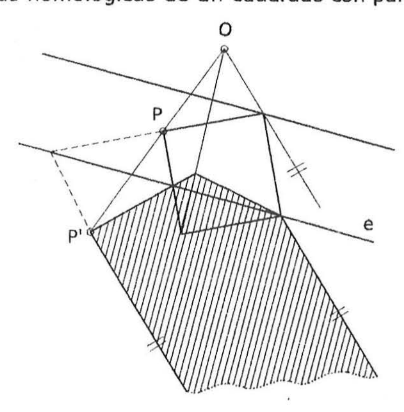


Fig. 13

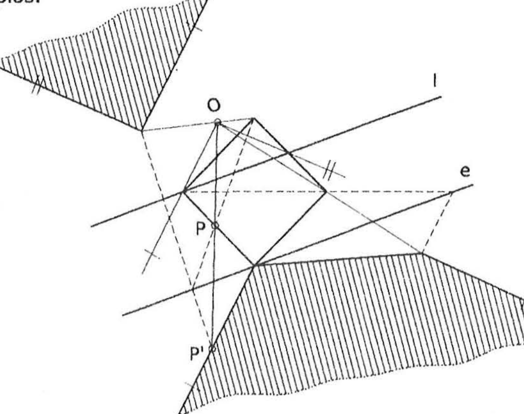


Fig. 14

3. Conocidos el centro y la recta límite de una homología, determinar la posición del eje que permite transformar *AB* en un segmento de longitud *d* (fig. 15). Dibujar a continuación un cuadrado de lado *AB* (fig. 16).

- El eje se halla encajando el segmento en verdadera magnitud con la dirección que va a tener tras la transformación;
- Se dibuja el cuadrado y se deshace la homología.

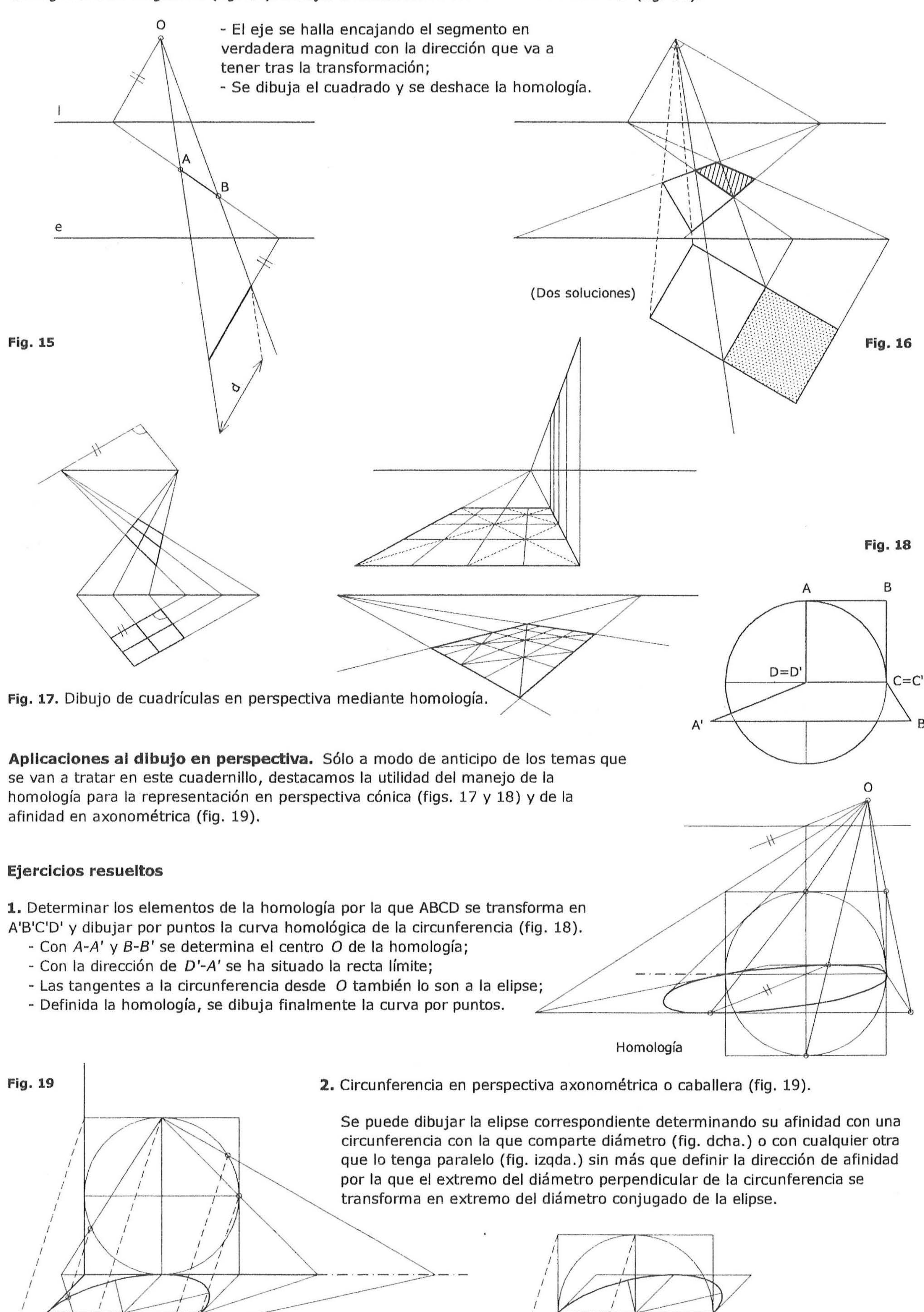


Fig. 17. Dibujo de cuadrículas en perspectiva mediante homología.

Aplicaciones al dibujo en perspectiva. Sólo a modo de anticipo de los temas que se van a tratar en este cuadernillo, destacamos la utilidad del manejo de la homología para la representación en perspectiva cónica (figs. 17 y 18) y de la afinidad en axonométrica (fig. 19).

Ejercicios resueltos

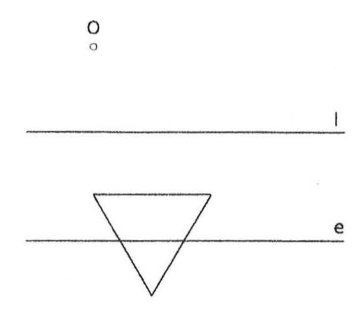
1. Determinar los elementos de la homología por la que ABCD se transforma en A'B'C'D' y dibujar por puntos la curva homológica de la circunferencia (fig. 18).

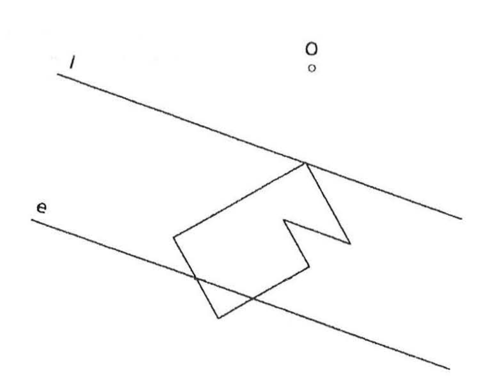
- Con *A-A'* y *B-B'* se determina el centro *O* de la homología;
- Con la dirección de *D'-A'* se ha situado la recta límite;
- Las tangentes a la circunferencia desde *O* también lo son a la elipse;
- Definida la homología, se dibuja finalmente la curva por puntos.

2. Circunferencia en perspectiva axonométrica o caballera (fig. 19).

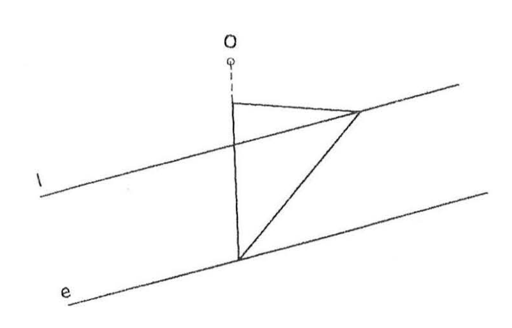
Se puede dibujar la elipse correspondiente determinando su afinidad con una circunferencia con la que comparte diámetro (fig. dcha.) o con cualquier otra que lo tenga paralelo (fig. izqda.) sin más que definir la dirección de afinidad por la que el extremo del diámetro perpendicular de la circunferencia se transforma en extremo del diámetro conjugado de la elipse.

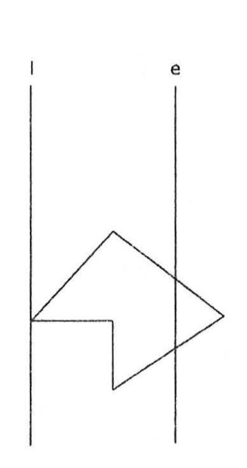
HOMOLOGÍA. EJERCICIOS



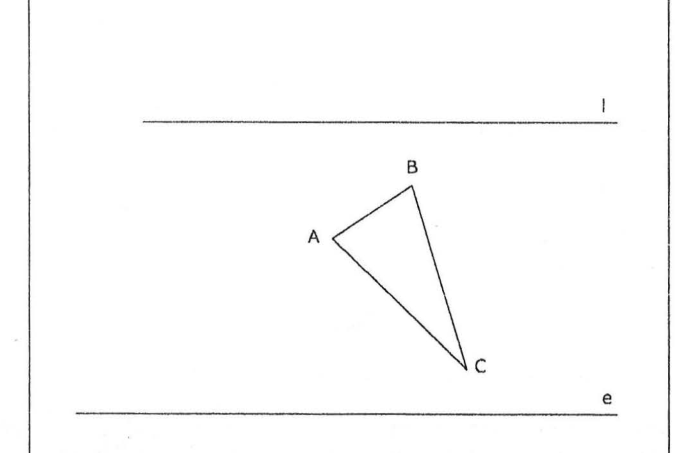


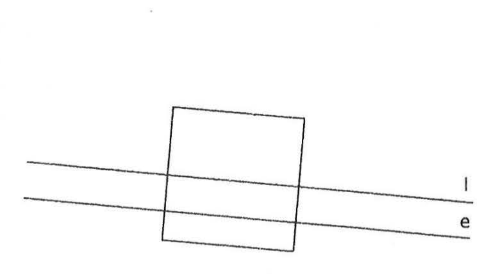
Dibujar las figuras homológicas de las dadas.





Conocido el triángulo ABC, hallar su homológico equilátero.

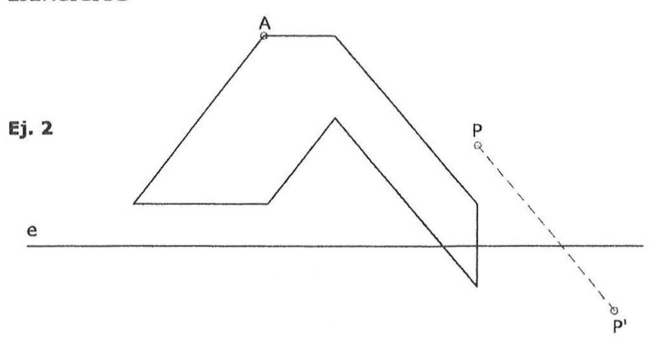




AFINIDAD. EJERCICIOS

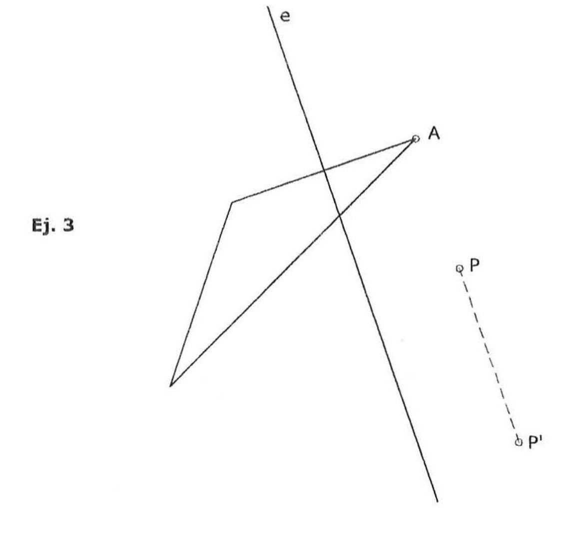
Ej. 1

Ej. 2

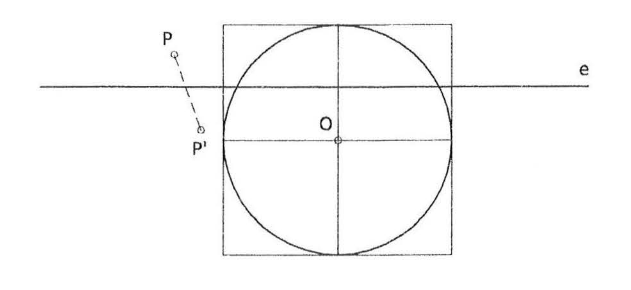


Ej. 1-3. Dibujar las figuras afines de las dadas.

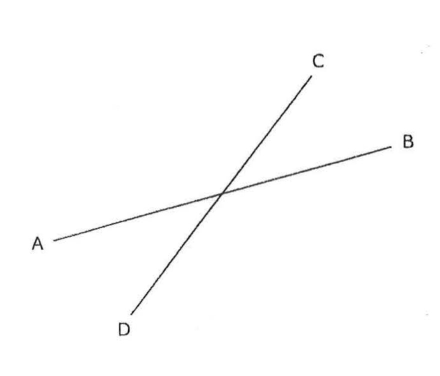
Ej. 3



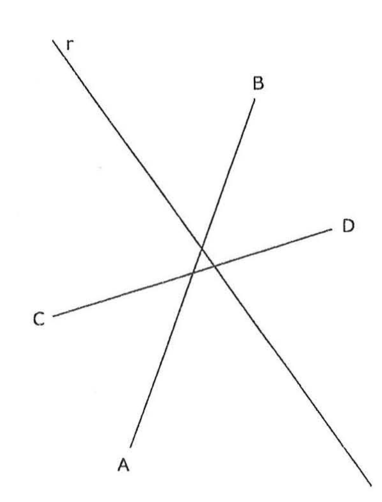
Dibujar la elipse afín de la circunferencia hallando los transformados de los ejes y de las tangentes que se dan.



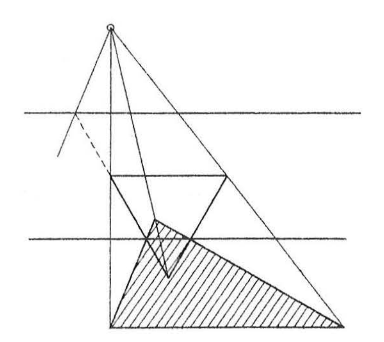
Dibujar por puntos obtenidos mediante afinidad la elipse definida por los diámetros conjugados AB y CD.

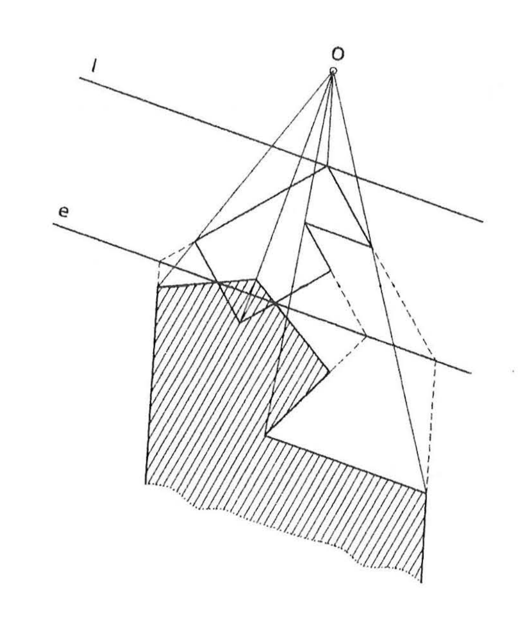


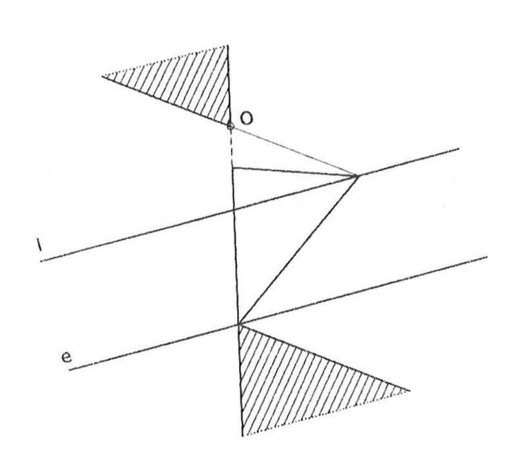
Determinar por afinidad los puntos de intersección de la recta r con la elipse definida por diámetros conjugados.

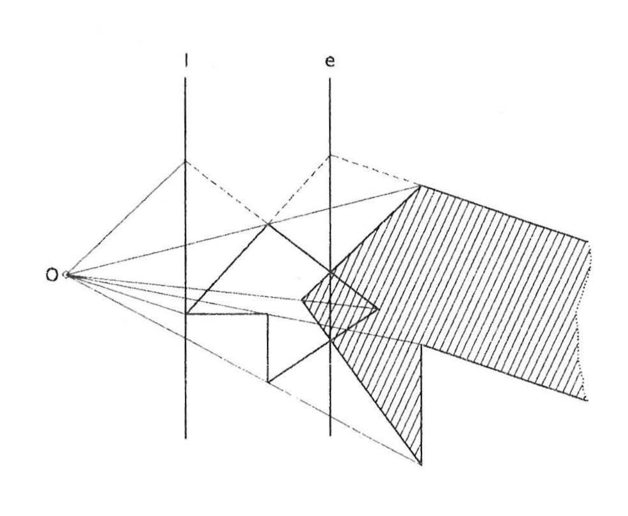


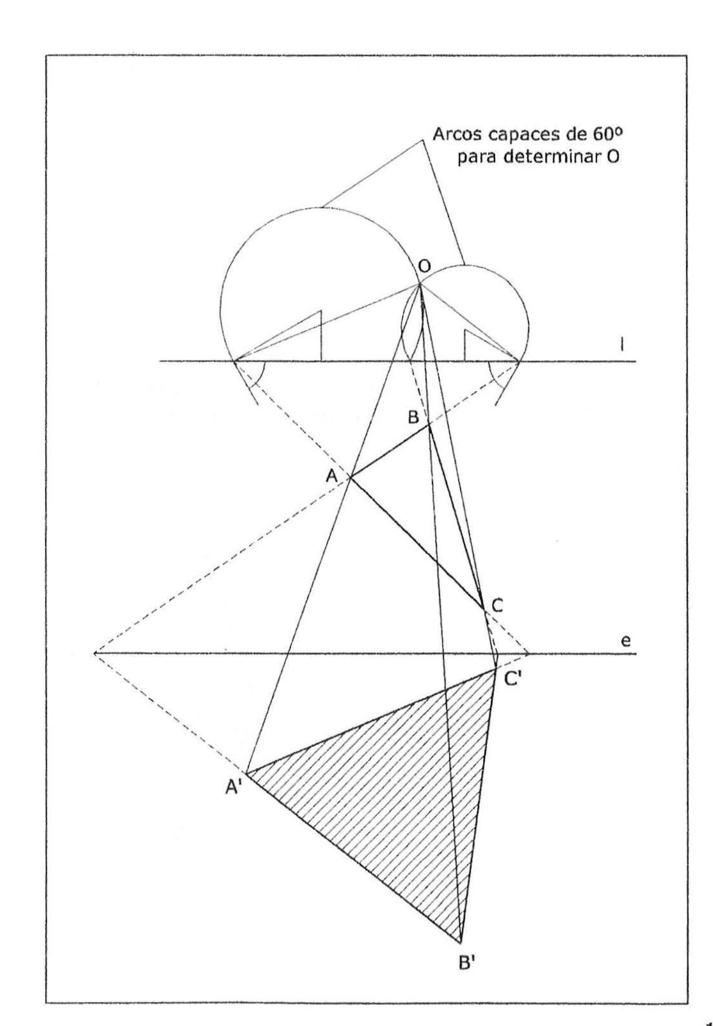
HOMOLOGÍA. SOLUCIONES

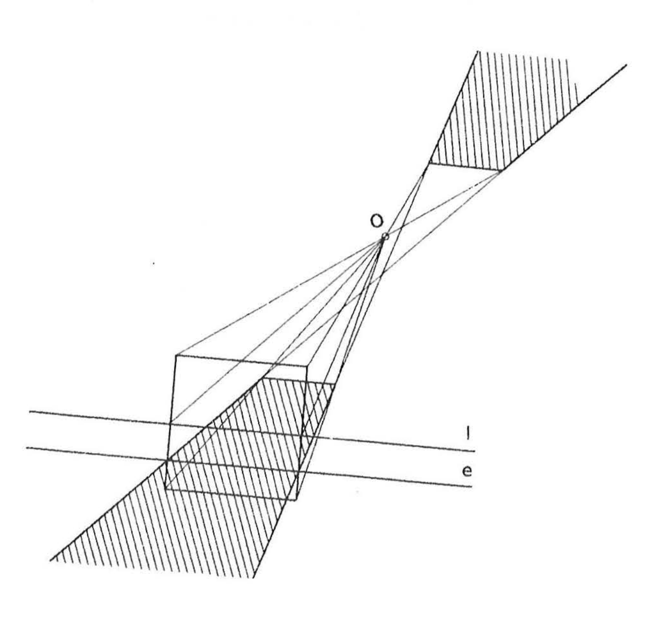






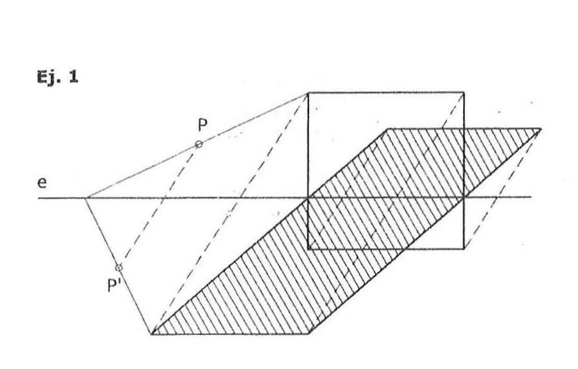




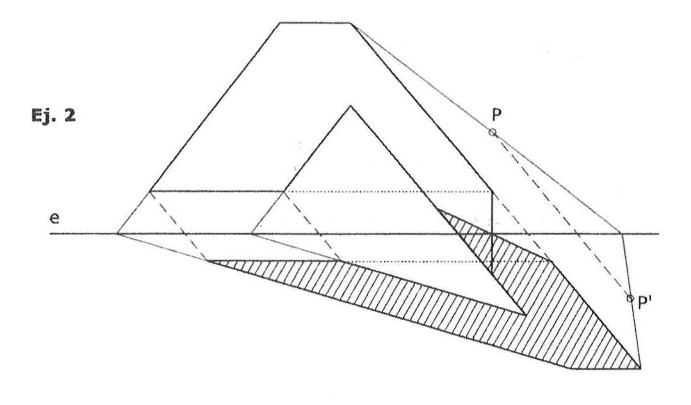


AFINIDAD. SOLUCIONES

Ej. 1

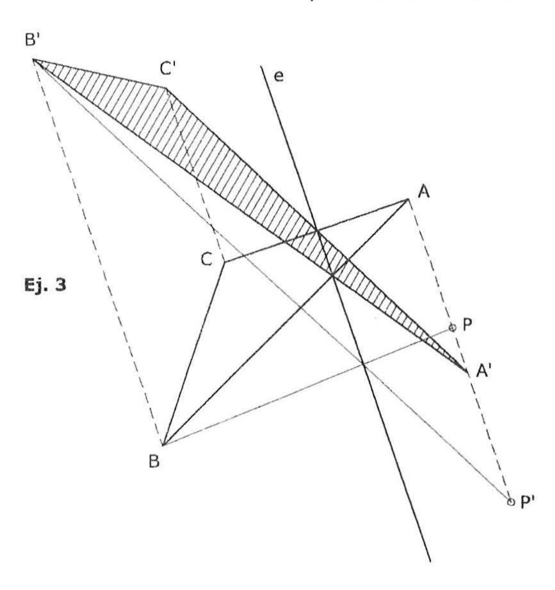


Ej. 2

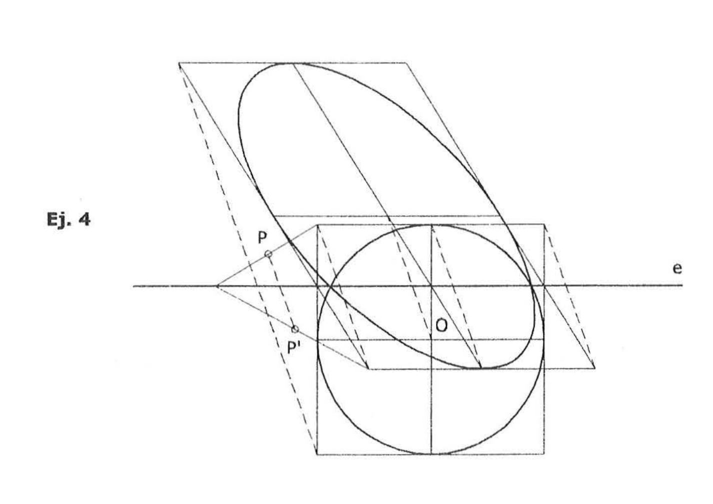


1. Obsérvese que se conserva el paralelismo, puesto que se trata de afinidades. Los puntos del eje son dobles, y las recatas paralelas al eje siguen siéndolo tras la transformación.
2. En la figura derecha se comprueba además que las rectas paralelas a la dirección de afinidad se transforman en sí mismas aunque sus puntos no sean dobles.
3. Ejemplo con dirección de afinidad paralela al eje. Se dibuja la auxiliar *PB* para obtener *B'*. A partir de éste obtenemos A' y finalmente C'.

Ej. 3



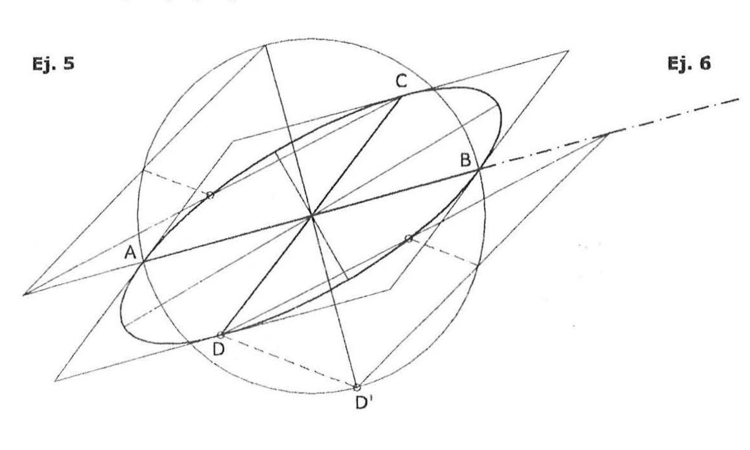
Ej. 4



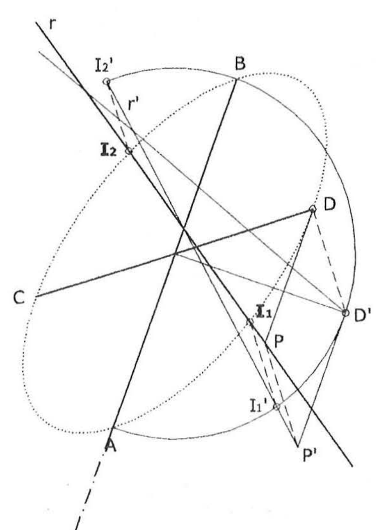
En los dos últimos casos se define la afinidad que existe entre la elipse y la circunferenica de diámetro coincidente con el mayor de los conjugados (que es el eje de la transformación). Como pareja de puntos homólogos se toman los extremos del diámetro perpendicular de la circunferencia y del diámetro menor de la elipse.

5. Trazamos las tangentes en los extremos de cada diámetro (paralelas al otro diámetro) para ayudar al dibujo y dibujamos la curva por puntos. Véase que es equivalente trabajar con las parejas de homólogos *D-D'* o *C-C'*.
6. Se determina la recta *r'*, afín de *r*, hallando el transformado de un punto cualquiera (por ejemplo *P*, paralelo al eje por *D*, resulta muy cómodo). Su intersección con la circunferenica son los puntos afines (I_1', I_2') de los de intersección de *r* con la elipse (I_1, I_2).

Ej. 5



Ej. 6



2. Curvas cónicas

Las curvas cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas), entendidas como secciones planas del cono de revolución (fig. 3) se pueden trazar por homología a partir de una circunferencia. O bien obtenerse como afines de otra curva del mismo tipo; en el caso de la elipse, puede hacerse partiendo de la circunferencia (que de hecho es un caso particular de elipse) (1).

Parábola e hipérbola. Se pueden estudiar como transformación homológica en el plano de la circunferencia que tiene respectivamente uno o dos puntos impropios, cuyos homólogos determinan las direcciones del eje en la parábola (fig. 2) y de las asíntotas en la hipérbola (fig. 1).

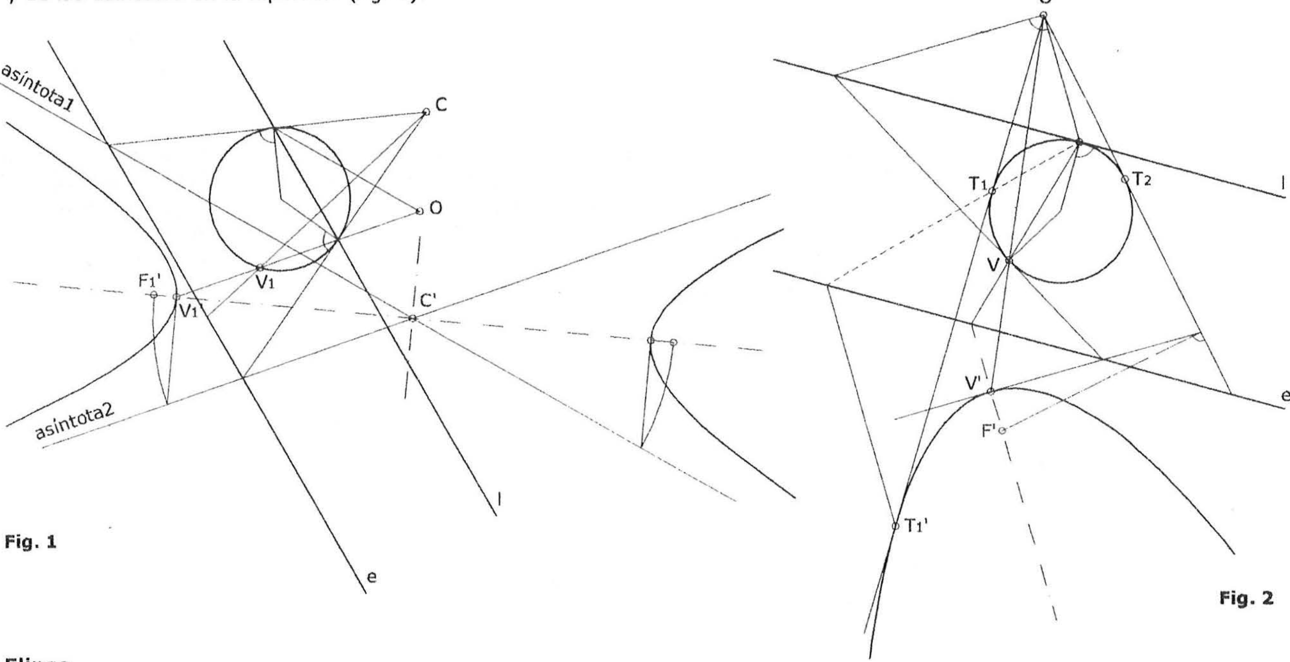


Fig. 1

Fig. 2

Elipse

- Entendida como curva homológica de la circunferencia (fig. 4);
- Como sección plana de un cilindro de revolución (por tanto curva afín de la circunferencia perpendicular al eje).

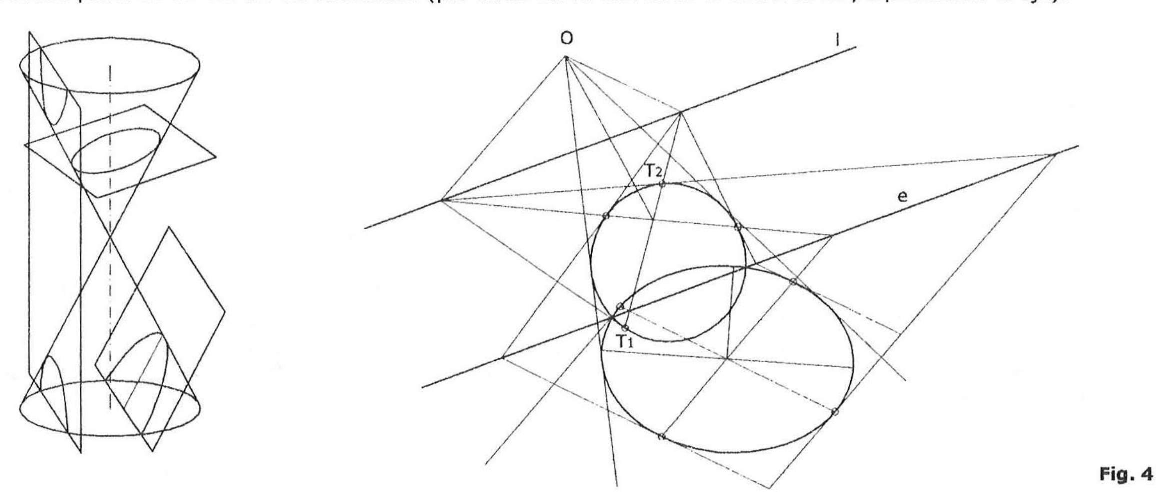


Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Representación afín de la elipse

Elipse definida por sus ejes (fig. 5). Se determina la afinidad que tiene por eje el diámetro coincidente de elipse y circunferencia y par de puntos homólogos *A-A'*. Obsérvese que se puede aprovechar la doble simetría de la curva, y a partir de cada punto afín hallado obtener otros tres.

(1) Son muchos los textos de Geometría Descriptiva que estudian los métodos de trazado de curvas cónicas. En este cuaderno se insinúa apenas la homología en los tres tipos de curvas, pero sólo se expone y aplica, por su sencillez y utilidad, la afinidad en la elipse.

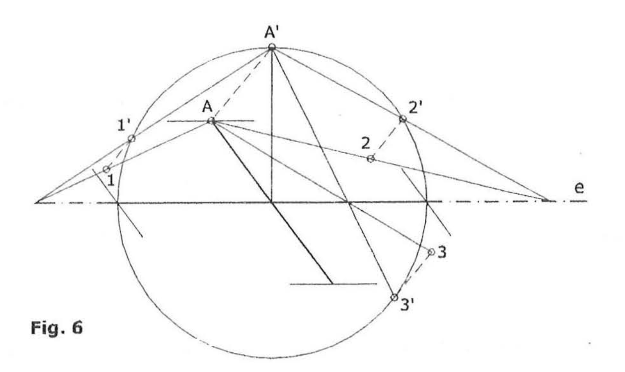


Fig. 6

Elipse definida por diámetros conjugados (fig. 6). Recordemos que conjugados son aquellos diámetros cuyas tangentes a la elipse en los extremos de cada uno de ellos son paralelas al otro. Conviene dibujarlas siempre para facilitar el trazado.

Se define la afinidad de homólogos *A-A'* y eje *e* y trazamos la curva hallando puntos afines de la circunferencia, del mismo (*1* y *2*) o distinto lado del eje (*3*).

El método por tanto coincide con el del caso anterior; sólo varía la dirección de afinidad.

Tangentes desde un punto exterior (fig. 7). Se determina el afín del punto (*P'*) y desde él se trazan las tangentes a la circunferencia afín con sus correspondientes puntos de tangencia (*T1'* y *T2'*). Los afines de estos puntos serán los puntos de contacto con la elipse de las tangentes trazadas por *P* (las generatrices del contorno aparente del cono).

Aplicación: dibujo de conos (ejemplo de cono recto de revolución con elipse definida por diámetros en fig. 8).

Se halla el afín *V'* del vértice y se determinan los puntos de contacto (*T1* y *T2*) de sus tangentes a la circunferencia. Los afines *T1* y *T2* son los puntos de tangencia de las generatrices del contorno aparente del cono.

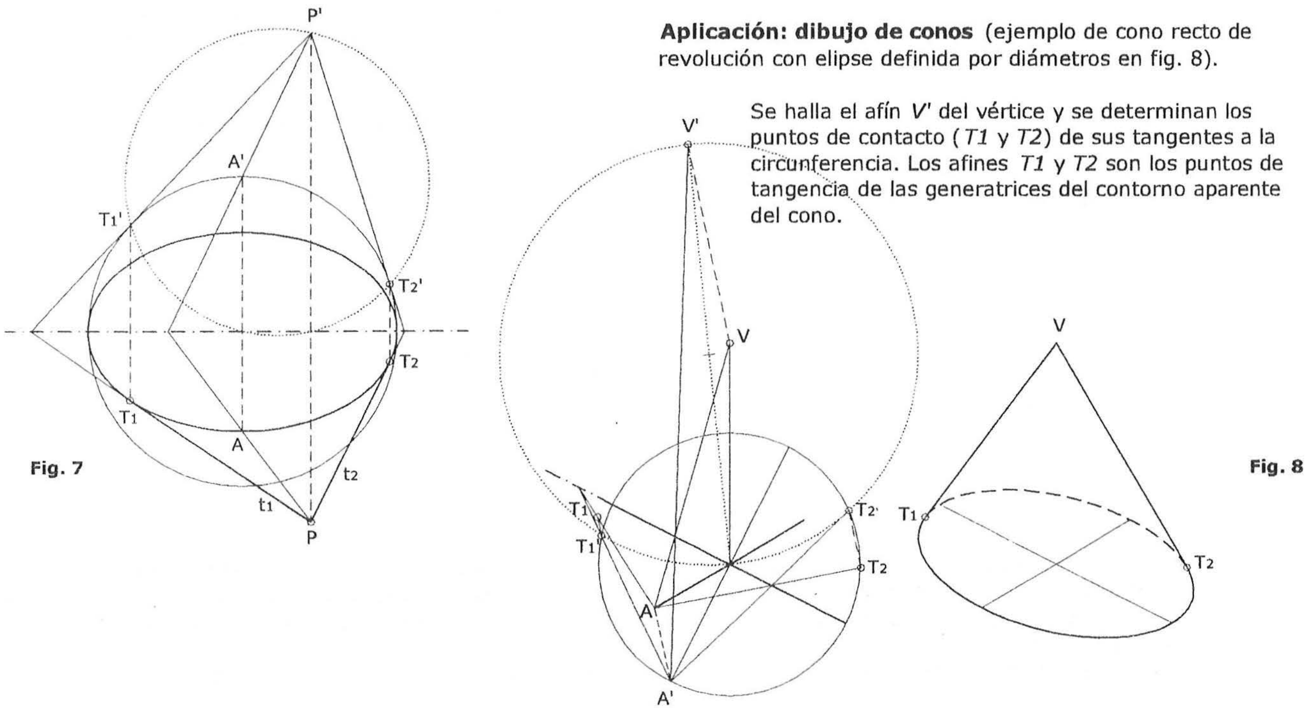


Fig. 7

Fig. 8

Tangentes paralelas a una dirección (fig. 9). Como en el caso anterior, se determina la dirección afín de las generatrices del cilindro, se trazan con ella las tangentes a la circunferencia, con sus puntos de contacto, y se obtienen los afines de éstos para dibujar por ellos las generatrices del contorno aparente del cilindro.

Aplicación: cilindros (ejemplo de solución oblicua en isométrica en fig. 11).

Se dibuja el cilindro de la misma manera que en el caso anterior. Hallamos la dirección afin de las generatrices y con ella los puntos de contacto en la circunferencia de las tangentes paralelas a esta dirección. Sus homólogos serán los correspondientes en la elipse.

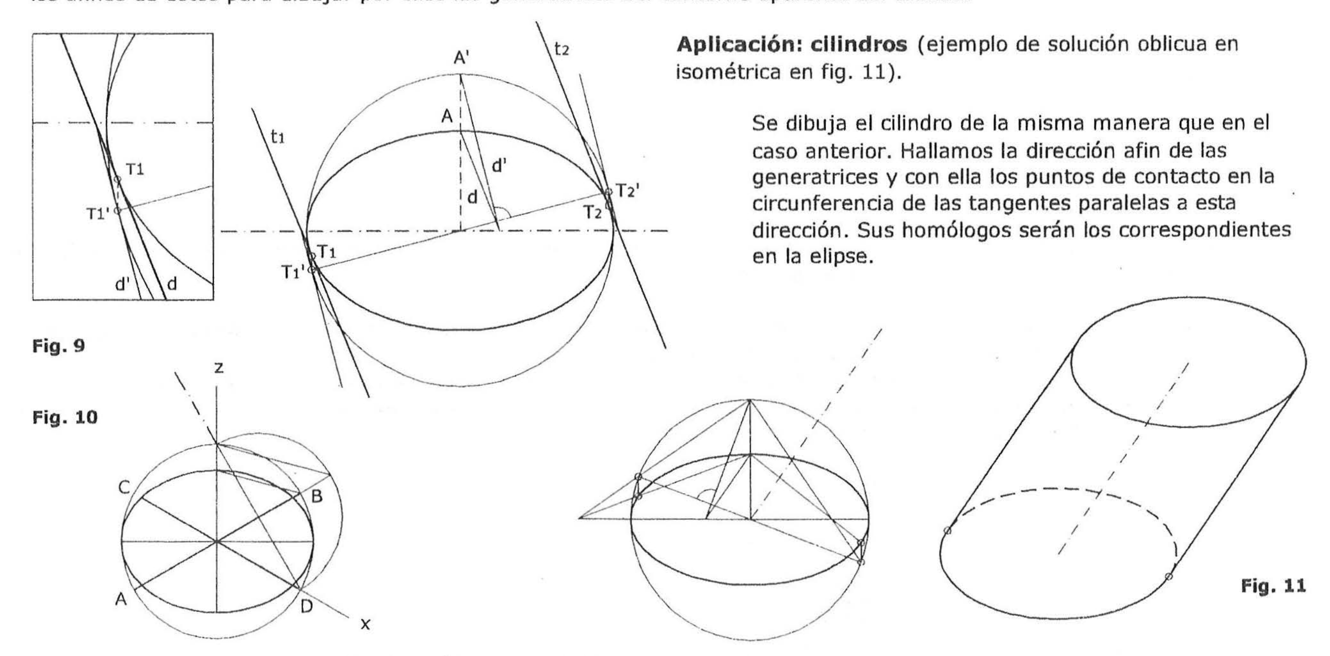


Fig. 9

Fig. 10

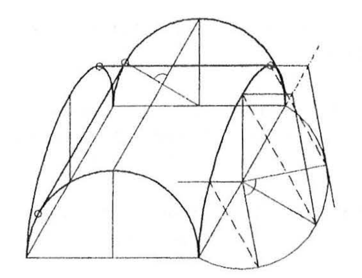
Fig. 11

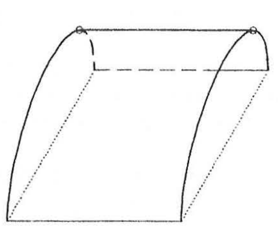
Circunferencia en perspectiva isométrica (fig. 10). Basta determinar los ejes de la elipse correspondiente. A partir de los diámetros conjugados *AB* y *CD* se abate uno de los planos del sistema (en el ejemplo el *XZ*) para obtener la reducción de los ejes (en este caso del *Z*), y determinar el eje menor de la elipse.

Dibujo de bóvedas

Una clara aplicación del trazado de tangentes a la elipse paralelas a una dirección la encontramos en el dibujo de bóvedas en axonometría, tanto ortogonal como caballera.

La bóveda de arista resulta de la intersección de dos cilindros del mismo radio y ejes perpendiculares que se cortan en un punto. Los cilindros son superficies cuádricas, cuya intersección en general es una curva alabeada de cuarto grado (cuártica); pero en este caso particular está formada por dos elipses, curvas planas de segundo grado (cónicas) verticales y perpendiculares entre sí.

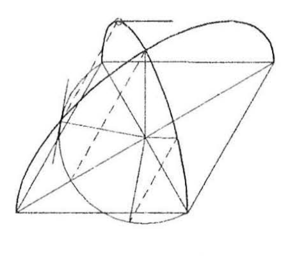


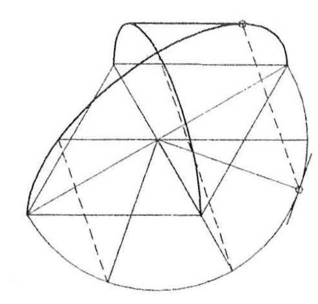


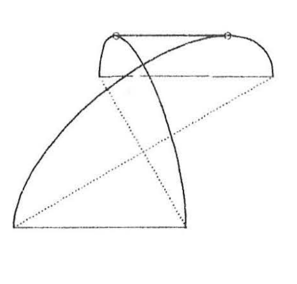
Ejemplo. Bóveda de arista en perspectiva caballera.

El problema se reduce a hallar las generatrices del contorno aparente de las bóvedas y sus puntos de tangencia con las curvas correspondientes:
- las de los arcos de intersección (cruceros);
- las de los extremos de las bóvedas.

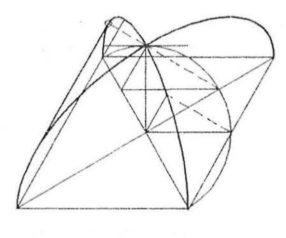
Se presenta desglosada paso a paso la secuencia de operaciones necesarias. En primer lugar se han determinado los puntos de contacto de la generatriz de contorno paralela al eje horizontal:
- Con las elipses extremo del cilindro al que pertenecen
- Con las dos elipses de los arcos cruceros.

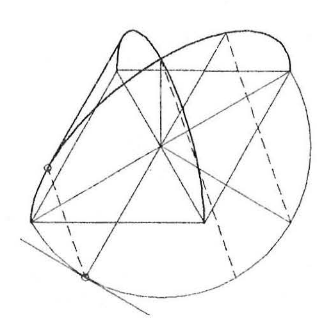


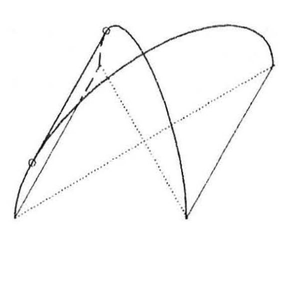




A continuación se repite este mismo proceso con la generatriz de contorno de la otra bóveda (paralela al eje Y):
-La intersección con los extremos de esta bóveda es inmediata por ser caballera. Las elipses correspondientes, en este caso son circunferencias. En otro tipo de axonometrías tendríamos que repetir la operación con las elipses correspondientes.
- Se han hallado finalmente los puntos de contacto de las elipses del crucero con la generatriz paralela a Y.

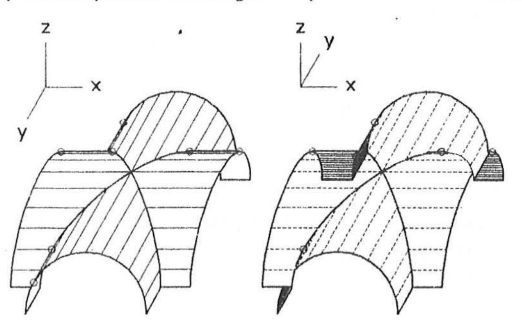






En todos los casos hemos definido las afinidades entre elipses y circunferencias abatiendo en el sitio, sobre el diámetro común, y hacia el lado que estorba menos al dibujo.

Finalmente se muestra la solución de una bóveda en la que se conserva parte de las secciones cilíndricas completas:
- Permite apreciar que el procedimiento es exactamente el mismo;
- Y lo más importante, que para dibujar las vistas superior e inferior (con la misma terna de ejes, se obtienen cambiando el sentido positivo del que no se ve en verdadera magnitud) sólo hay que revisar las líneas vistas y ocultas, pero los puntos de tangencia y la forma de obtenerlos son iguales.

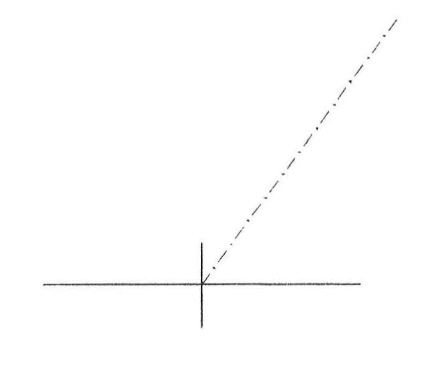


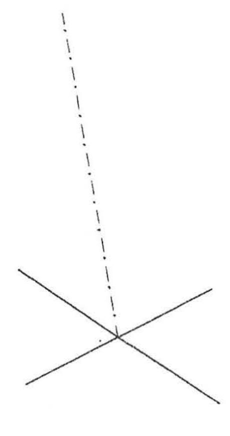
CURVAS CÓNICAS: CONOS Y CILINDROS. EJERCICIOS

Dibujar utilizando la afinidad, los conos definidos y limitados por el vértice y los diámetros conjugados o ejes de una circunferencia directriz.



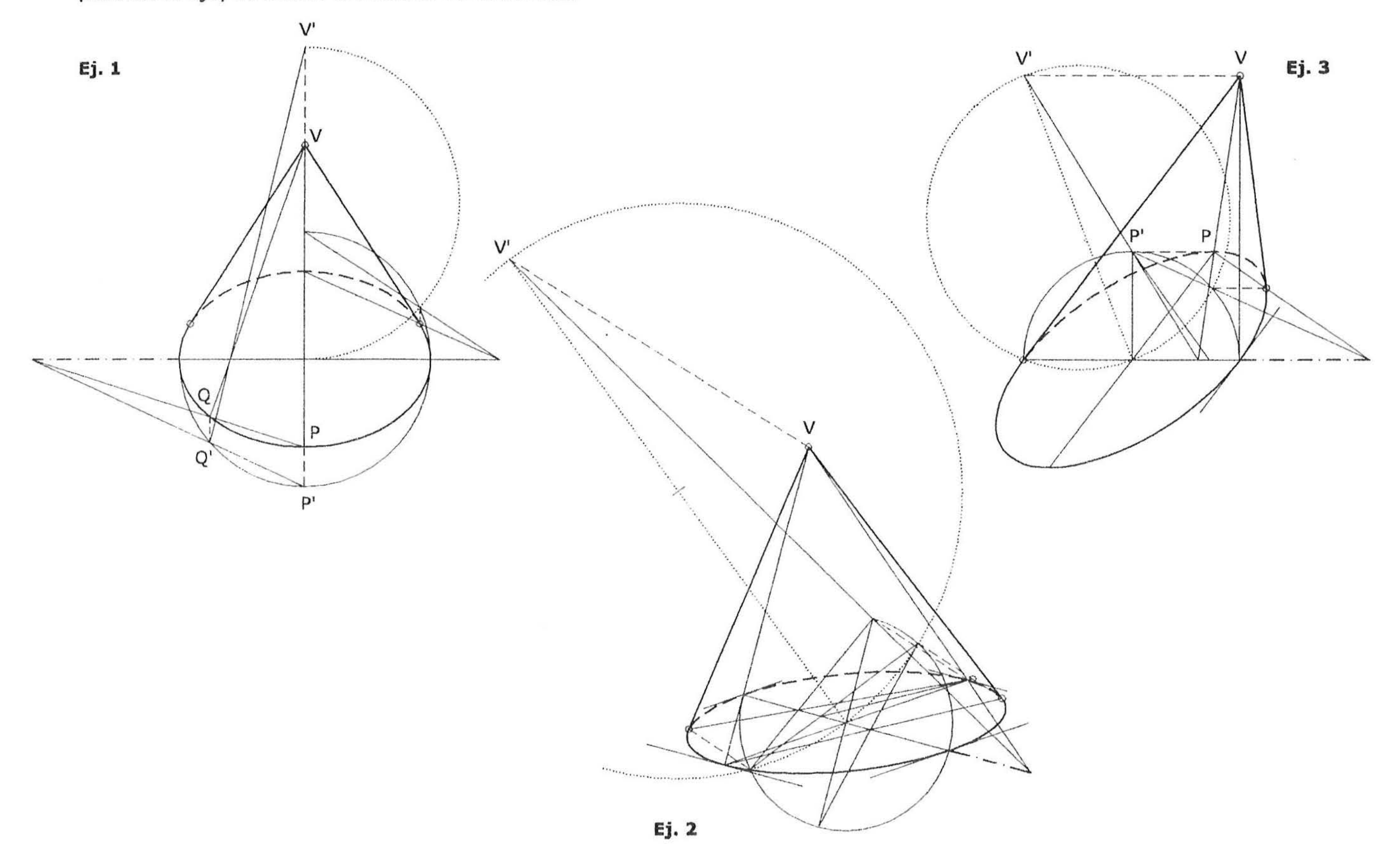
Dibujar los cilindros definidos por los centros de dos secciones circulares paralelas, de las que se dan ejes en el primer caso y diámetros conjugados en el segundo. Deben resolverse por afinidad, hallando los puntos de contacto de las generatrices del contorno aparente, y no es necesario dibujar más que una de las curvas (la segunda se hará por traslación.



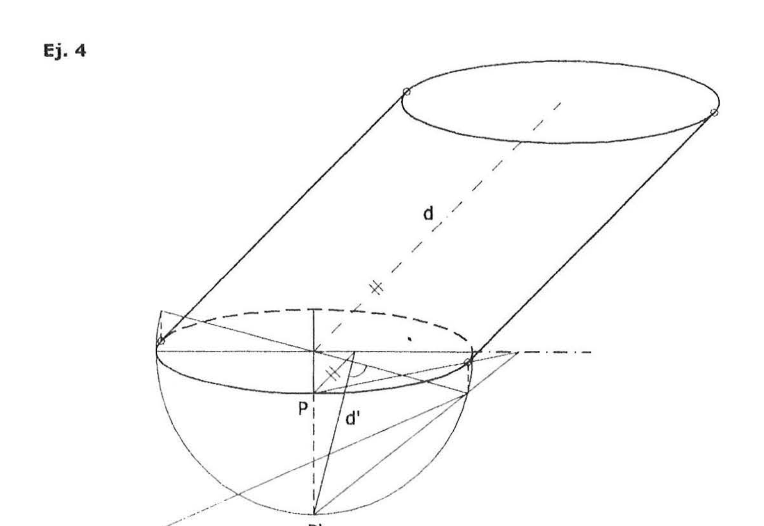


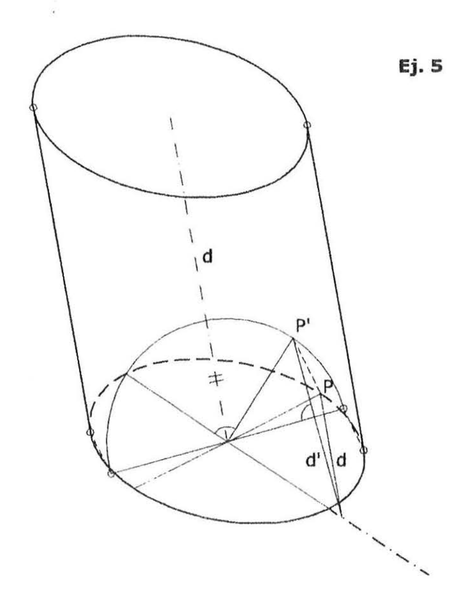
CURVAS CÓNICAS: CONOS Y CILINDROS. SOLUCIONES

1. La elipse está definida por ejes y el cilindro es recto, con lo que el vértice está alineado con el eje menor y la solución es simétrica. Para obtener el afín del vértice hay que determinar previamente una pareja cualquiera de puntos homólogos.
2. Caso general de trazado de tangentes a una elipse desde un punto.
3. En este ejemplo el vértice está situado sobre la tangente por el extremo izquierdo de uno de los diámetros conjugados. Es por tanto un caso particular simplificado, en el que uno de los puntos de tangencia es este extremo. El otro se determina a partir del afín del vértice, que aunque parece tener otra peculiaridad, puesto que la dirección de afinidad es paralela al eje, no afecta al método de resolución.



4 y 5. En los dos casos planteados se empieza dibujando la dirección afín de la de las generatrices del cilindro. La de la izquierda está definida por ejes y requeriría obtener una pareja de puntos homólogos (como en el primer ejemplo de conos) si el cilindro fuese recto, pero al ser oblicuo no es necesario.
A continuación se determinan las tangencias a las circunferencias afines paralelas a la dirección afín (no es necesario dibujar las tangentes, basta obtener los puntos de contacto) y se deshace la afinidad para encontrar los puntos de tangencia en la elipse paralelos a la dirección dada.





CURVAS CÓNICAS: BÓVEDAS. EJERCICIOS

1.

2.

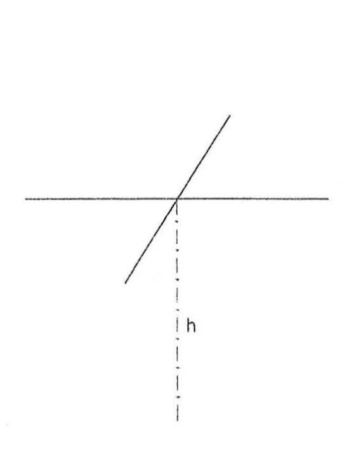
3.

Dibujar la bóveda de arista definida en perspectiva isométrica (aprovéchense las simetrías para agilizar el trabajo).

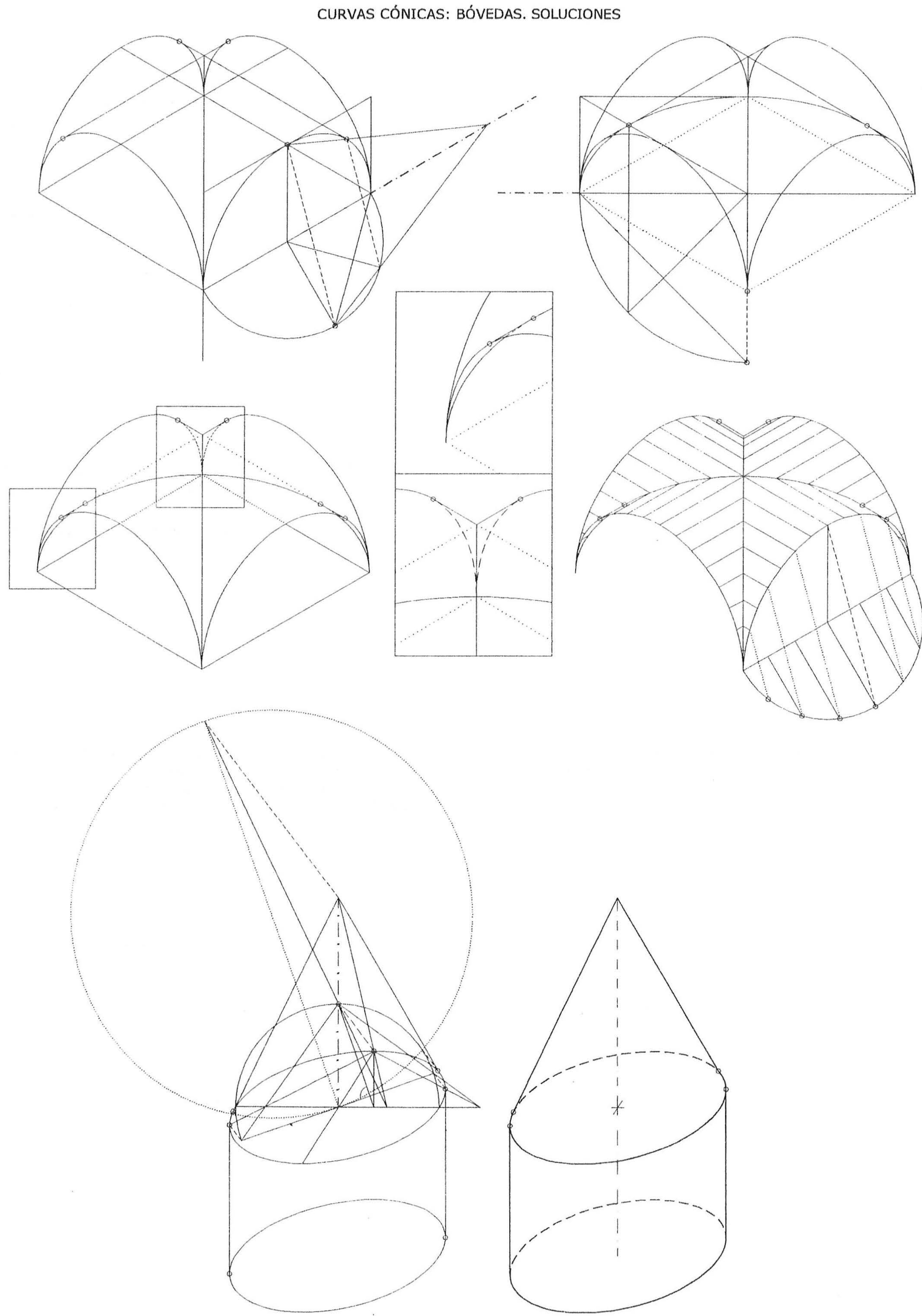
1. Tangencias con elipses de los arcos formeros.
2. Tangencias en los arcos cruceros.
3. Solución final.

Dibujar un cilindro con cubierta cónica (ambos de revolución y eje común) del que se conocen el vértice del cono (*V*), la altura del cilindro (*h*) y una pareja de diámetros conjugados de la sección común en planta. Téngase en cuenta que los puntos de contacto de las generatrices del contorno aparente del cono y del cilindro no coinciden. Deben hallarse mediante afinidad, al igual que al menos una de las curvas (la segunda puede dibujarse por traslación a partir de ella).

V



CURVAS CÓNICAS: BÓVEDAS. SOLUCIONES



3. Axonometría ortogonal

Si dos rectas son perpendiculares en el espacio (no es necesario que se corten, pueden cruzarse), sus proyecciones sobre cualquier plano paralelo a una de ellas también son perpendiculares.
El sistema axonométrico no hace sino proyectar un triedro trirrectángulo de ejes sobre un plano que se hace coincidir con el papel (plano del cuadro, Π en fig. 1). Esta proyección puede ser oblicua o perpendicular al plano del cuadro, dando lugar respectivamente a las axonometrías oblicuas y ortogonales (isométrica, dimétricas o trimétricas).

Cada eje del triedro (por ejemplo *z* en fig. 1) es perpendicular al plano definido por los otros dos (*x* e *y*), y por tanto a cualquiera de las rectas de este plano, incluida la traza (intersección) del plano *xy* con *Π*. En la proyección ortogonal sobre un plano del cuadro *Π* las proyecciones de cada eje (los ejes axonométricos) son perpendiculares a la traza del plano formado por los otros dos ejes con *Π*.

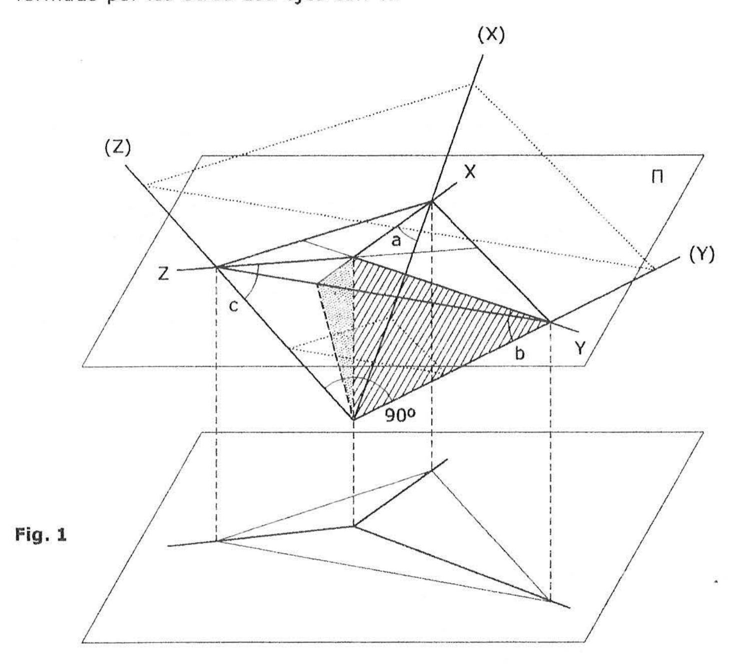


Fig. 1

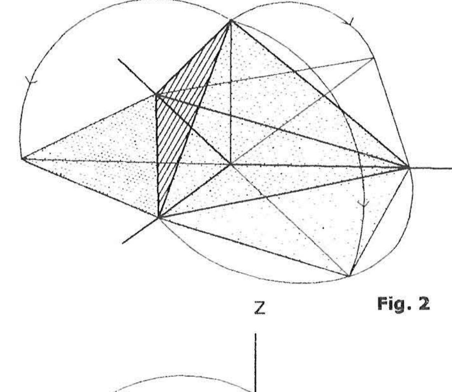


Fig. 2

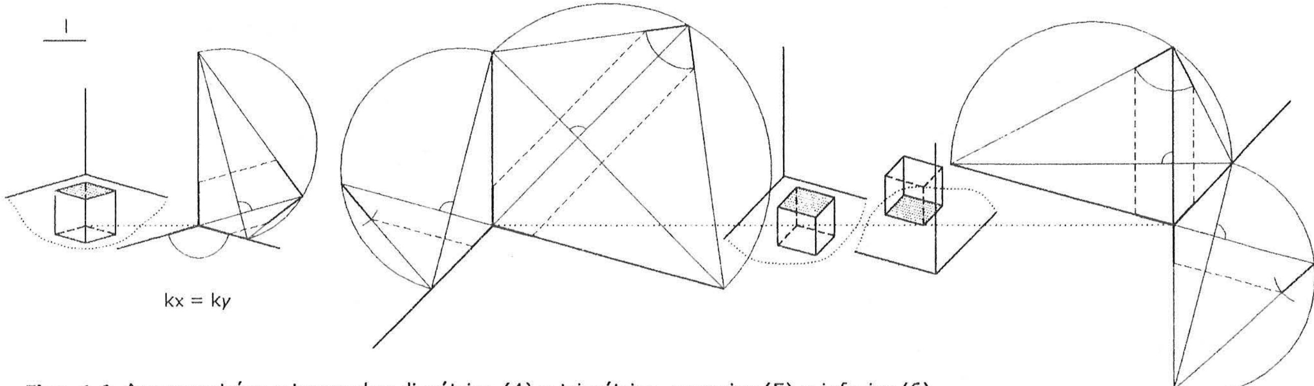
Fig. 3

Dibujo sobre planos coordenados

Los planos coordenados se pueden abatir sobre el plano del cuadro para verlos en verdadera magnitud, haciéndolos girar alrededor de su recta intersección con el cuadro (la charnela o eje del abatimiento) hasta que coincidan con él.

La situación del plano del cuadro no afecta a estos abatimientos, siempre que se mantenga su orientación. Tan sólo hay que cuidar que en caso de realizar más de uno se utilice un mismo plano del cuadro (las charnelas deben coincidir en los ejes axonométricos). Y se puede girar indistintamente hacia uno u otro lado de este eje: lo haremos hacia el que convenga al trazado.

Podemos así graduar los ejes axonométricos y dibujar sobre los planos correspondientes (fig. 3).
- Con cada abatimiento se gradúan dos ejes, por lo que si la axonometría es isométrica o dimétrica basta con uno; sólo en trimétrica se necesita efectuar dos abatimientos (figs. 4-6).
- Se pueden dibujar figuras en los planos coordenados utilizando la afinidad que tiene como eje la charnela del abatimiento y par de puntos homólogos la proyección directa del vértice, *V*, y su abatido, *(V)*, que se obtiene trazando el arco capaz de 90º, puesto que los ejes abatidos, en verdadera magnitud, son perpendiculares.

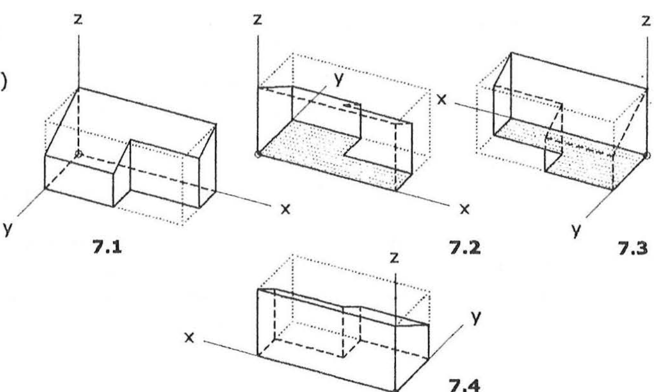


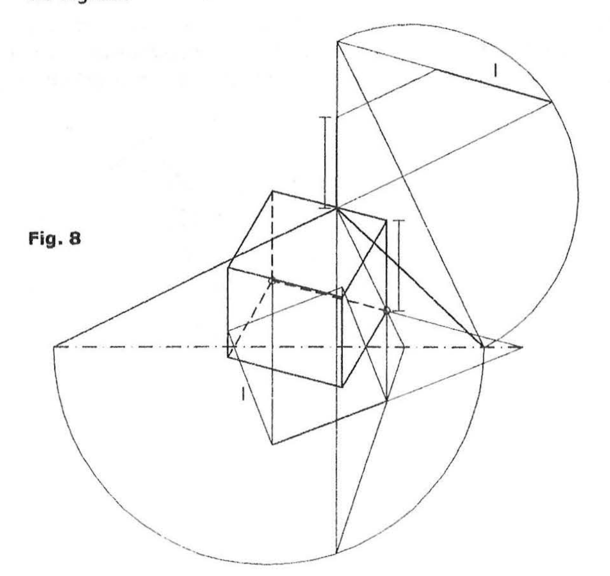
Figs. 4-6. Axonometrías ortogonales dimétrica (4) y trimétrica, superior (5) e inferior (6).

Ejemplos con distintas ternas de ejes (fig. 7)

7.2 y 7.3 Vistas inferiores de la pieza representada en 7.1 en vista superior (cambia el sentido de uno de los ejes *X* o *y*); 7.4 Giro del plano horizontal 180º (alternados los ejes *X* e *Y*)

Obsérvese que en las vistas inferiores lo único que varía es el sentido positivo de los ejes. Para graduarlos, se abate de la misma manera; sólo hay que tener en cuenta el convenio de signos.




Fig. 8

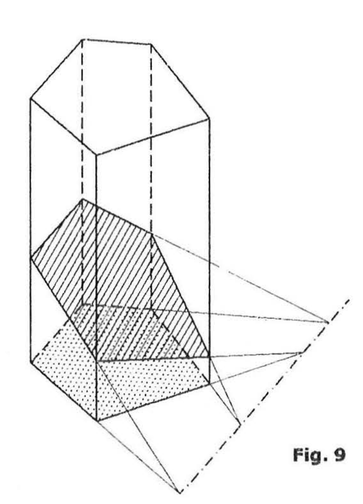
Ejercicio resuelto. Dibujar un cubo con una cara horizontal de la que se conoce una arista (fig. 8).

Aplicación inmediata de lo expuesto, se abate el plano que contiene la arista dada, se dibuja la cara correspondiente abatida (habrá dos soluciones, aunque sólo se ha dibujado una) y se deshace el abatimiento. Se gradúa el tercer eje para determinar las alturas. Siempre teniendo en cuenta que se conserva el paralelismo para agilizar el trazado.

Dibujo sobre planos oblicuos

Resulta muy útil utilizar la afinidad que existe entre la proyección directa de una figura y su proyección sobre los planos coordenados (el más intuitivo suele ser el horizontal *xy*, pero se puede trabajar igualmente con *xz* o *yz*). El eje de la transformación es la traza del plano con el coordenado correspondiente.

Aplicación: secciones planas en perspectiva.
Se propone relacionar secciones de la propia radiación, por lo que como método es ajeno a la dirección de proyección de la axonometría, y válido para todas ellas (ortogonales y oblicuas) e independiente de la posición de los planos coordenados. Basta determinar la traza del plano secante con el plano sobre el que se proyecta (ejemplo en fig. 9).


Fig. 9

Perspectiva de la circunferencia (figs. 10 y 11)

Cualquier pareja de diámetros perpendiculares de la circunferencia se transforma en diámetros conjugados en sus correspondientes elipses afines.

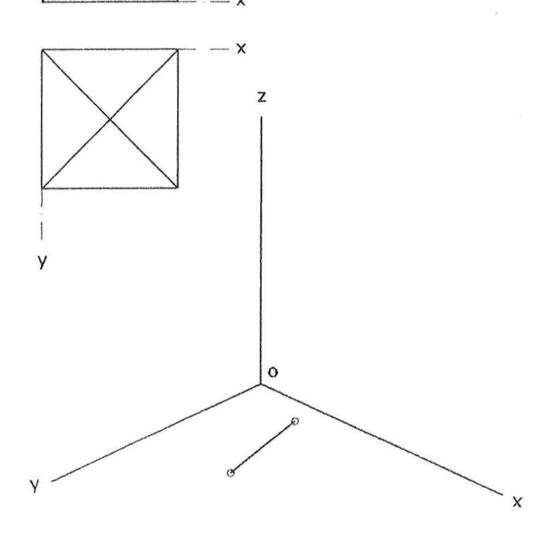
Afinidades:
- Entre la circunferencia abatida y en planta (fig. 10):
  eje: e_1
  puntos homólogos: *V* y *(V)*
- Entre la planta y el plano oblicuo (fig. 11):
  eje: e_2
  puntos homólogos: O_1 y *O*

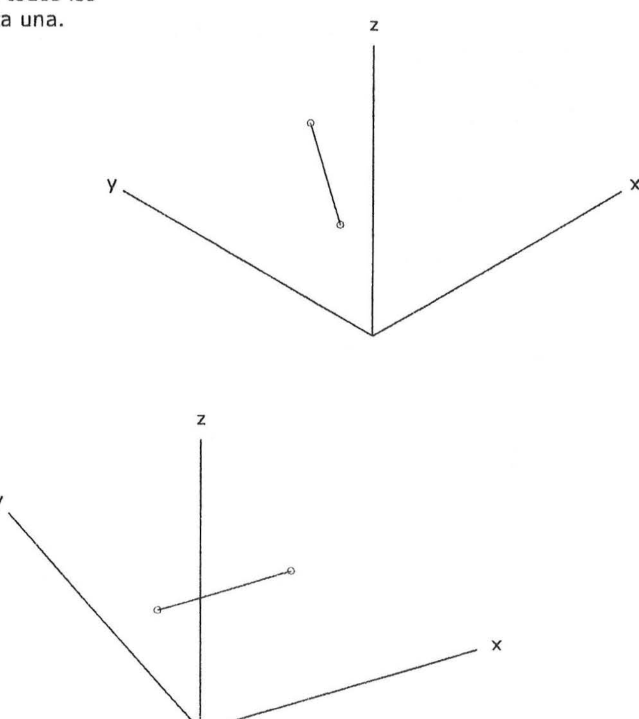
Fig. 10

Fig. 11

AXONOMETRÍA ORTOGONAL. EJERCICIOS

1-3. Dibujar en perspectiva axonométrica, graduando los ejes, la pirámide representada por sus vistas en diédrico, de la que se da una arista contenida en el plano *OXY*. Aunque en todos los casos son posibles dos soluciones, basta una.

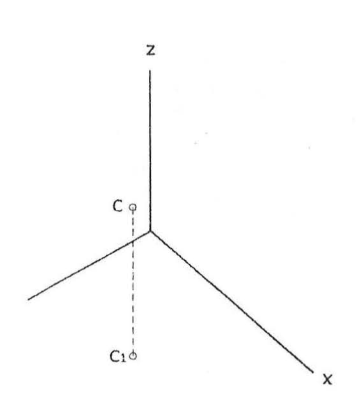




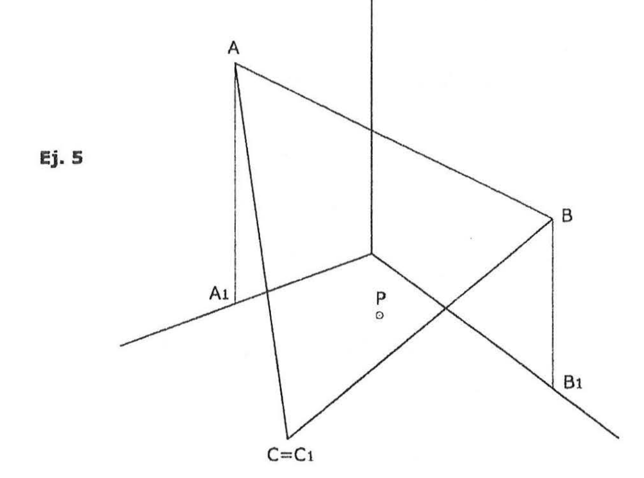
4. Dibujar una circunferencia de centro *C* y 25mm de diámetro contenida en un plano paralelo al *XZ*.

5. Dibujar un prisma recto de 30 mm de altura y base cuadrada de 12.5 mm de lado, del que se conoce un vértice *P* de la arista horizontal de su sección por el plano definido por los puntos *A*, *B* y *C*. Dibujar la sección.

Ej. 4

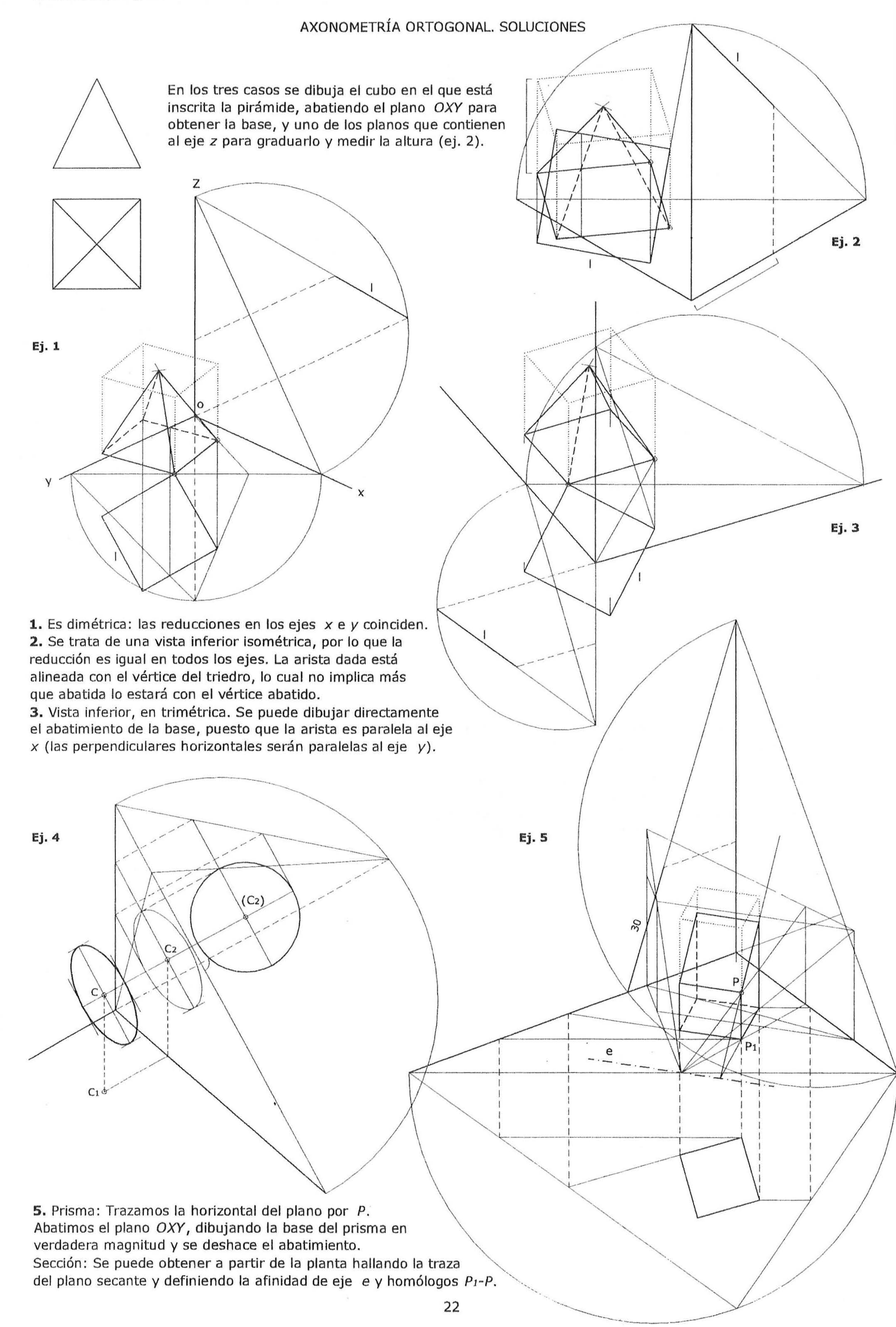


Ej. 5



AXONOMETRÍA ORTOGONAL. SOLUCIONES

En los tres casos se dibuja el cubo en el que está inscrita la pirámide, abatiendo el plano *OXY* para obtener la base, y uno de los planos que contienen al eje *z* para graduarlo y medir la altura (ej. 2).

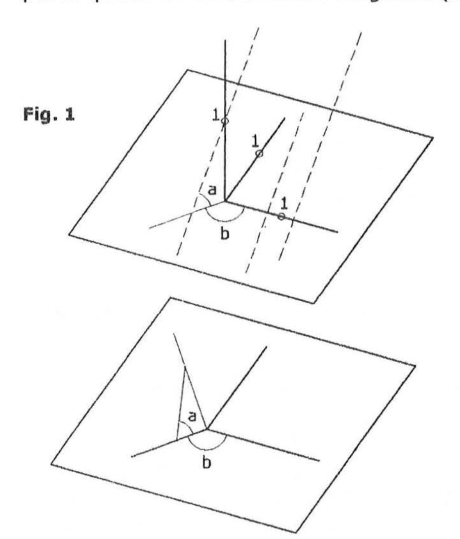


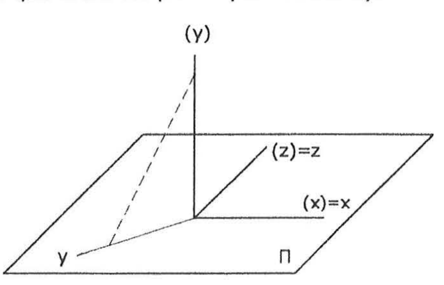
1. Es dimétrica: las reducciones en los ejes *x* e *y* coinciden.
2. Se trata de una vista inferior isométrica, por lo que la reducción es igual en todos los ejes. La arista dada está alineada con el vértice del triedro, lo cual no implica más que abatida lo estará con el vértice abatido.
3. Vista inferior, en trimétrica. Se puede dibujar directamente el abatimiento de la base, puesto que la arista es paralela al eje *x* (las perpendiculares horizontales serán paralelas al eje *y*).

5. Prisma: Trazamos la horizontal del plano por *P*.
Abatimos el plano *OXY*, dibujando la base del prisma en verdadera magnitud y se deshace el abatimiento.
Sección: Se puede obtener a partir de la planta hallando la traza del plano secante y definiendo la afinidad de eje *e* y homólogos P_1-P.

4. Perspectiva caballera

Se trata de una axonometría oblícua en la que uno de los planos del triedro de ejes se coloca paralelo al plano del cuadro, por lo que se ve en verdadera magnitud (al igual que todos los planos paralelos a él).





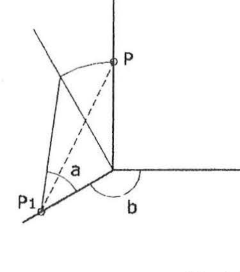


Fig. 2

La dirección de proyección queda definida conociendo la orientación del plano perpendicular al cuadro Π que la contiene (*b*) y el ángulo que forma con éste (*a*). Para la representación se pueden dibujar los ejes axonométricos y situar la proyección de un punto del eje perpendicular al cuadro (P_1) y cualquiera de los que están a la misma distancia del vértice sobre los ejes de Π (*P* en fig. 2 izq.) O abatirlo sobre el cuadro tomando como charnela o eje de giro uno de lo s ejes paralelos a él (fig. dcha.)

Dibujo sobre los planos coordenados: definición de la afinidad

Se puede abatir los planos *XY* e *YZ* sobre el *XZ* (el paralelo al cuadro) para dibujar sobre ellos en verdadera magnitud. Entre las figuras correspondientes existe una afinidad que tiene como charnela el eje compartido con *XZ*: *X* en el primer caso (fig. 3) y *Z* en el segundo (fig. 4).

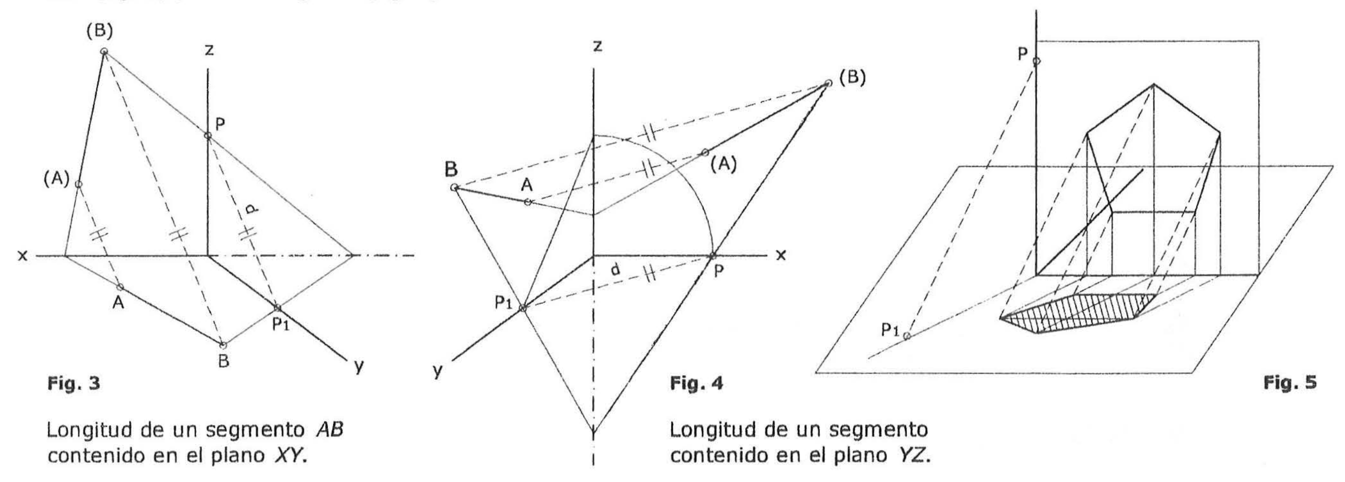


Fig. 3

Longitud de un segmento *AB* contenido en el plano *XY*.

Fig. 4

Longitud de un segmento contenido en el plano *YZ*.

Fig. 5

Obsérvese que es indiferente girar hacia uno u otro lado de la charnela (figs. 6-7 y 9).
Y que se puede dibujar sobre planos paralelos a los coordenados sin más que proyectar previamente sobre ellos o realizar el abatimiento desplazando la charnela hasta el plano. En fig. 8, por ejemplo, se ha dibujado un triángulo paralelo al plano *YZ* con un vértice apoyado en *XY* abatiendo su proyección sobre *YZ*.

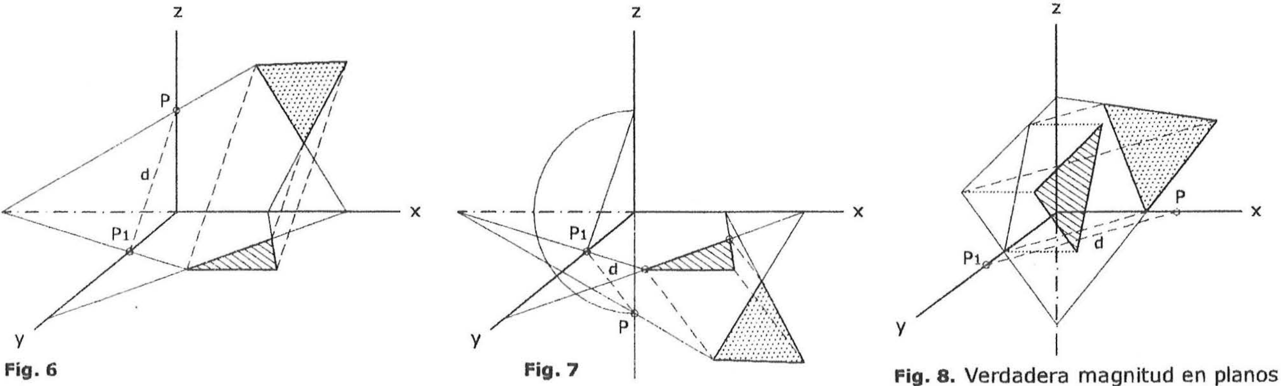


Fig. 6

Fig. 7

Abatimiento de una figura contenida en el plano *XY* sobre el *XZ*.

Fig. 8. Verdadera magnitud en planos paralelos a los coordenados.

Fig. 9

Aplicación: longitud de un segmento oblicuo (fig. 9)

Se determina fácilmente como hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos la proyección horizontal del segmento (en verdadera magnitud) y la diferencia de cotas de sus extremos.

Ejercicio resuelto. Perspectiva caballera de un cubo de arista dada (fig. 10)

Se da una arista contenida en el plano *XY*, y puesto que no se especifica la posición del cubo, lo resolvemos con la más sencilla: con una cara apoyada en este plano.
Abatimos (por ejemplo hacia la parte inferior del eje *X*), definiendo la pareja de homólogos P_1-(P). A partir de la cara abatida se obtiene la proyección de la base por afinidad y se lleva la altura de las aristas verticales.

Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Dibujo sobre planos oblicuos

Puede definirse una transformación afín entre el plano y su abatimiento sobre el cuadro o entre el plano y su proyección sobre cualquiera de los otros dos planos axonométricos (en figs. 11 y 12 se ha hecho con *XY*).

Representación de la circunferencia

Si está contenida en un plano paralelo a *XY* o *YZ*, basta abatirlos y definir la afinidad correspondiente. Cualquier diámetro de la circunferencia se transforma en conjugado en la elipse, pero los más intuitivos para la representación son los paralelos al plano que se ve en verdadera magnitud (fig. 13).
Si la circunferencia está sobre un plano oblicuo se define la afinidad y se obtiene la elipse de la misma manera que en axonometría ortogonal.

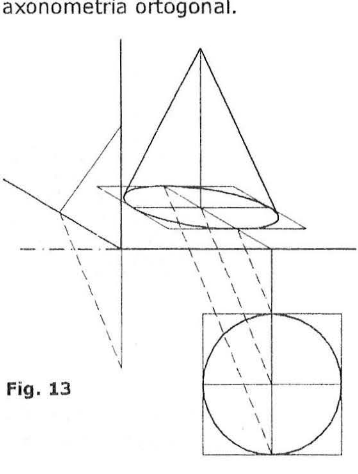
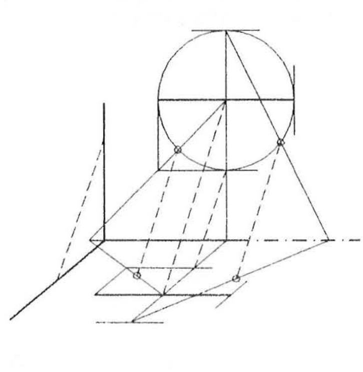


Fig. 13



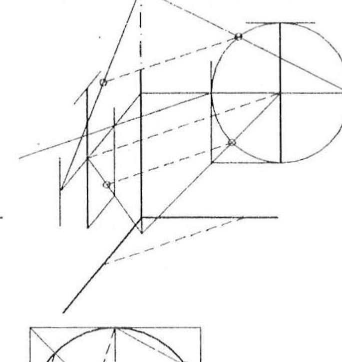
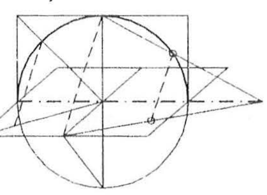


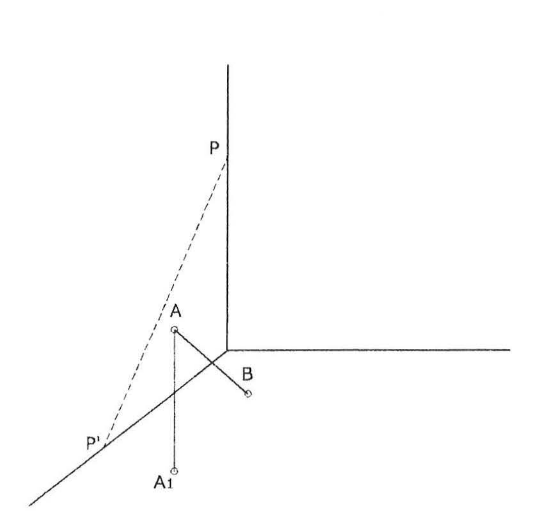
Fig. 14

En todo caso, téngase presente la comodidad que supone abatir sobre el propio plano diametral de la circunferencia (fig. 14).

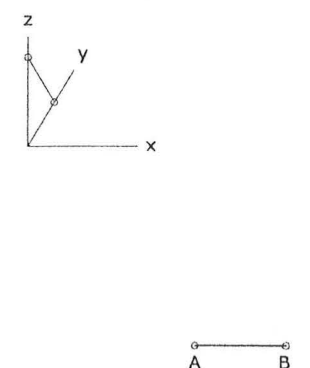


PERSPECTIVA CABALLERA. EJERCICIOS

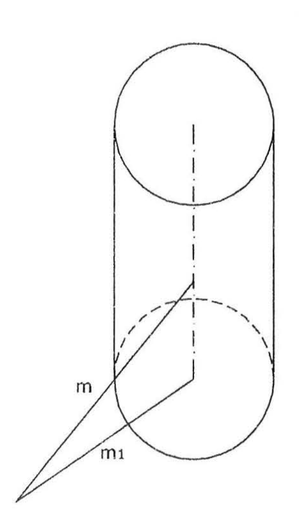
Dibujar un triángulo equilátero horizontal de lado *AB*.

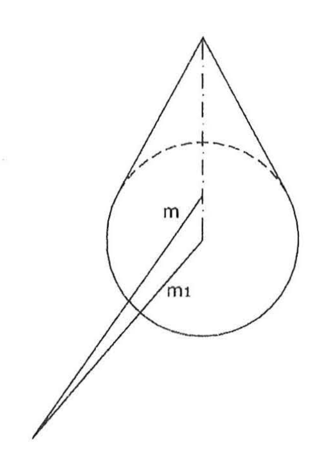


Dibujar la vista inferior de una pirámide recta de planta octogonal de lado *AB* y 30mm de altura.

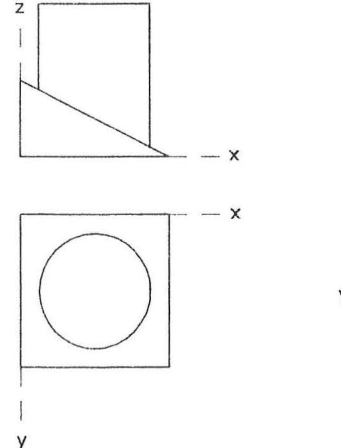


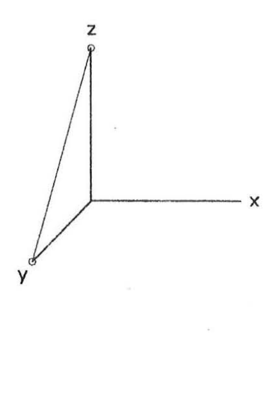
Dibujar en perspectiva militar las secciones producidas por los planos definidos por una recta de máxima pendiente *m* en el cilindro y cono rectos dados.



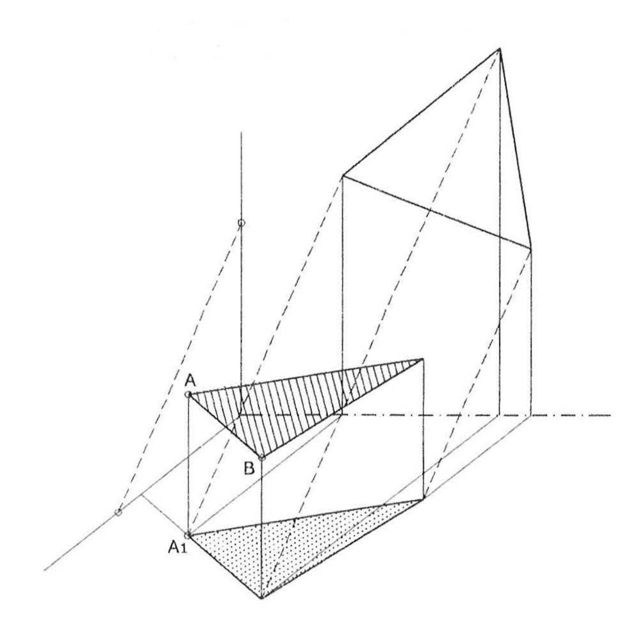


Dibujar en perspectiva caballera el sólido definido por sus vistas en diédrico.

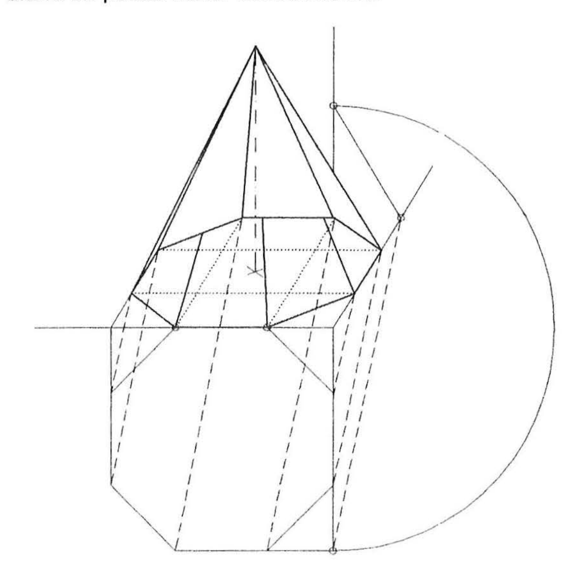




PERSPECTIVA CABALLERA. SOLUCIONES



Se ha abatido sobre *XZ* hacia abajo, por claridad del dibujo. Por tratarse de perspectiva caballera, la altura se puede medir directamente.



En perspectiva caballera de planta (militar) el plano paralelo al cuadro es *XY*. Permite dibujar ejes de las circunferencias en planta y obtener a partir de ellos diámetros conjugados de la elipse.

En ambos casos: Afinidades de eje *e* y pareja de puntos homólogos *P*-*P1*

Se determinan los puntos de tangencia de las elipses con las generatrices del contorno aparente.

Observación: Siempre que se dibujen cónicas hay que determinar los elementos que las definen; en el caso de la elipse, ejes o diámetros conjugados. En este cuaderno se propone utilizar la afinidad como método para obtener puntos.

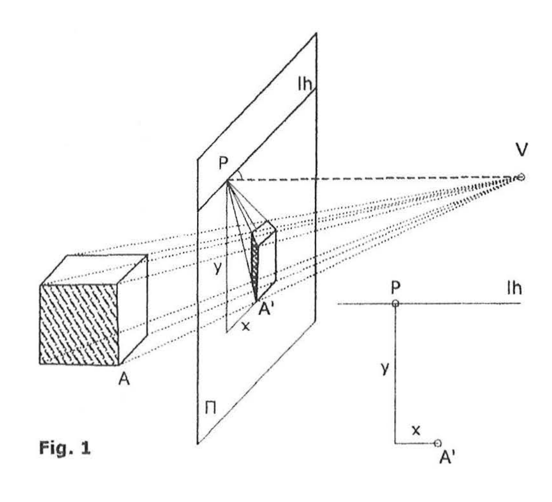


Fig. 1

5. Perspectiva cónica

En el sistema de perspectiva cónica se proyecta desde un vértice propio (punto de vista, *V* en fig. 1) sobre un plano (cuadro, *Π* en esta figura) que es el que finalmente se representa en el dibujo.
Situamos el punto de vista dibujando la línea de horizonte *lh*, intersección con el cuadro del plano de horizonte (plano horizontal por *V*) y proyectando *V* ortogonalmente sobre ella en el punto principal *P*.

A la linea de horizonte y el punto principal se puede referir la posición de la proyección de los puntos que queremos representar.
Así por ejemplo, en fig. 1 la proyección cónica del punto *A* queda definida por las coordenadas que hemos denominado *x* e *y*.

Puntos de fuga

Las proyecciones de las rectas paralelas a una dirección convergen ('fugan') en un punto, que se obtiene como intersección con el plano del cuadro de la recta paralela a esta dirección que pasa por *V*. Tanto en general si las rectas son oblicuas (fig. 3) como si son horizontales (fig. 2).
En este último caso, los puntos de fuga están situados sobre la linea de horizonte.
Conociendo la traza de las rectas (intersección con el plano del cuadro) y su punto de fuga podemos representarlas en perspectiva.

Fig. 2

Fig. 3

Representación sobre planos horizontales

Se puede determinar el ángulo que forman dos rectas horizontales abatiendo el plano de horizonte sobre el cuadro según se ve en fig. 4. El punto de vista abatido en *(V)* forma con los respectivos puntos de fuga de las rectas el ángulo buscado (1).
Lo que resulta muy util para dibujar figuras con 'familias' de rectas paralelas a unas mismas direcciones, como sucede en el ejemplo de fig. 5.

Fig. 4

Fig. 5

(1) La proyección en perspectiva cónica de figuras planas no es otra cosa que la representación homológica de las mismas. En el caso de volúmenes la transformación resulta poco útil; en este cuadernillo nos limitamos a comentar brevemente sólo algunos fundamentos del sistema y a realizar ejercicios de representación de formas contenidas en planos horizontales y verticales.

Interpretación homológica de la perspectiva

Entre la figura contenida en un plano horizontal y su proyección cónica (sección por un plano del cuadro, en principio vertical, aunque podría no serlo y la perspectiva oblicua) existe una homología, puesto que no son sino dos secciones planas de una misma radiación de vértice propio. Si se abate la figura horizontal sobre el plano del cuadro puede definirse la homología plana entre las figuras:
Su eje será la intersección de los dos planos, lo que es lo mismo, la traza del horizontal con ∏ (linea de tierra).

La recta límite, traza del plano paralelo al de la figura por V, es la línea de horizonte.

El centro, el punto de vista abatido sobre el cuadro (V).

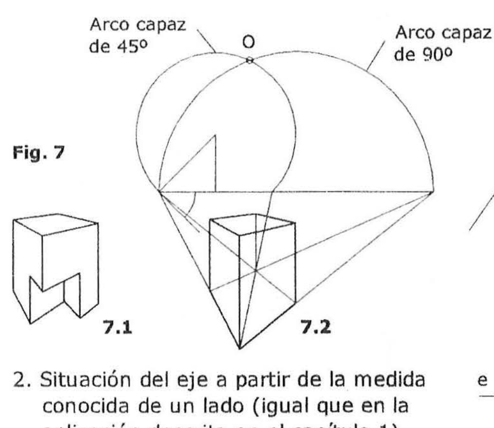
Ejercicio resuelto. Perspectiva de un edificio dado en diédrico (fig. 6).

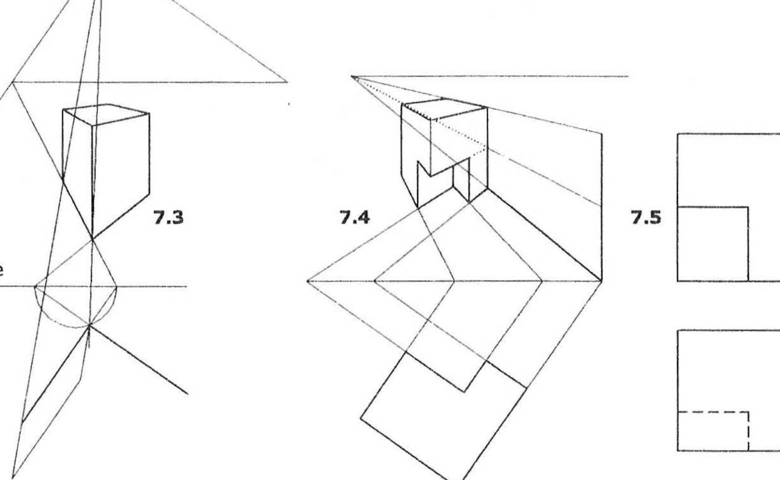
Fig. 6

Aplicación: restitución perspectiva (fig. 7)

A partir de una imagen perspectiva (la foto de un edificio, por ejemplo) de la que se tiene algún dato, se puede llegar a conocer su representación diédrica. En el ejemplo propuesto se sabe que la planta del edificio es un cuadrado de lado *d*.

1. Se determina la recta límite hallando los puntos de fuga de los lados opuestos (mejor en planta que en cubierta, para evitar ángulos pequeños). El centro con los arcos capaces correspondientes a lados y lado-diagonal (7.2).





2. Situación del eje a partir de la medida conocida de un lado (igual que en la aplicación descrita en el capítulo 1) (7.3).
3. Abatimiento de la plante para determinar las dimensiones del voladizo (7.4) y finalmente cálculo de las alturas para poder dibujar planta y alzado del edificio (7.5).

Representación de la circunferencia

En figs. 8 y 9 se han dibujado sendas circunferencias contenidas en planos vertical y horizontal respectivamente. Se ha utilizado para ello la afinidad de centro *O*, recta límite *l* y eje *e* (en ambos casos intersección de los planos de las circunferencias con el plano del cuadro). Y se ha abatido cada una de ellas utilizando estas charnelas.

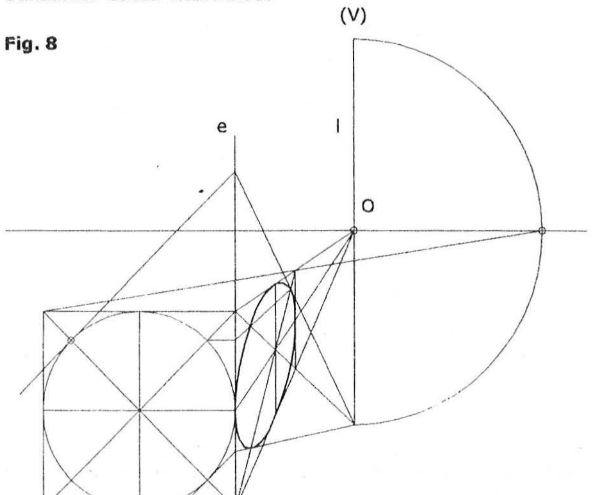


Fig. 8

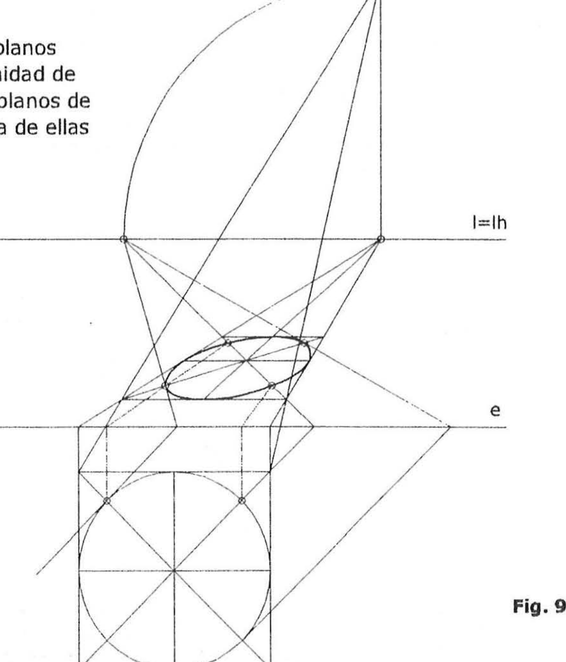
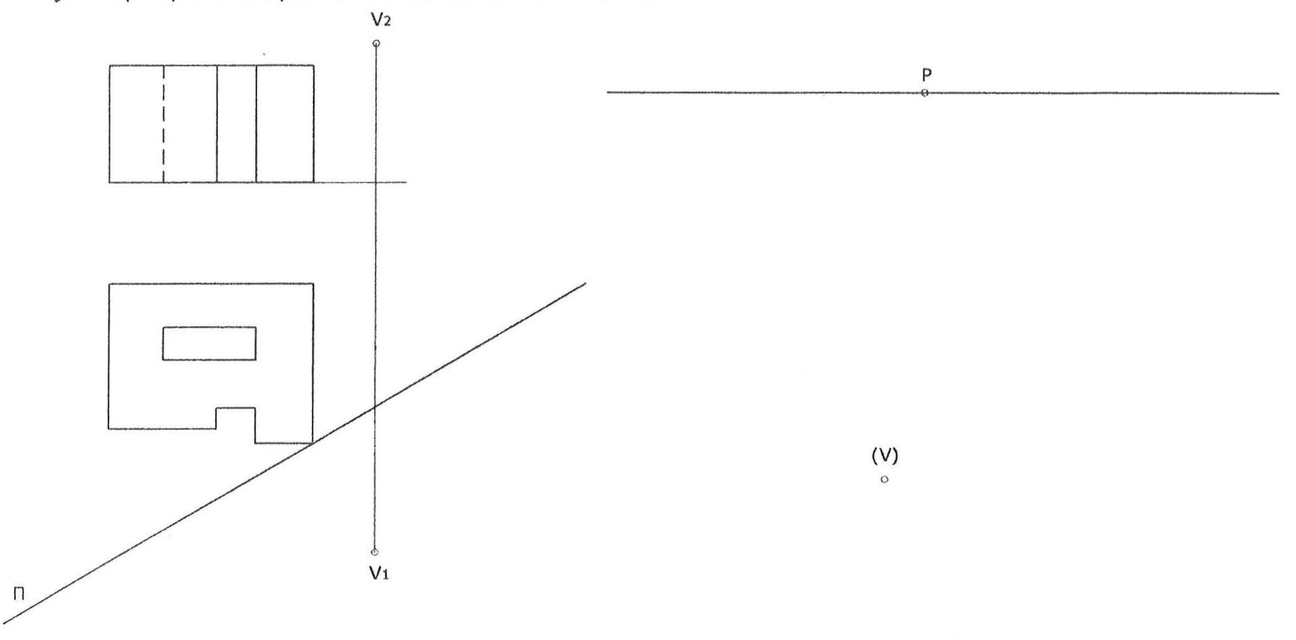


Fig. 9

PERSPECTIVA CÓNICA. EJERCICIOS

Dibujar en perspectiva la planta del edificio con los datos dados.



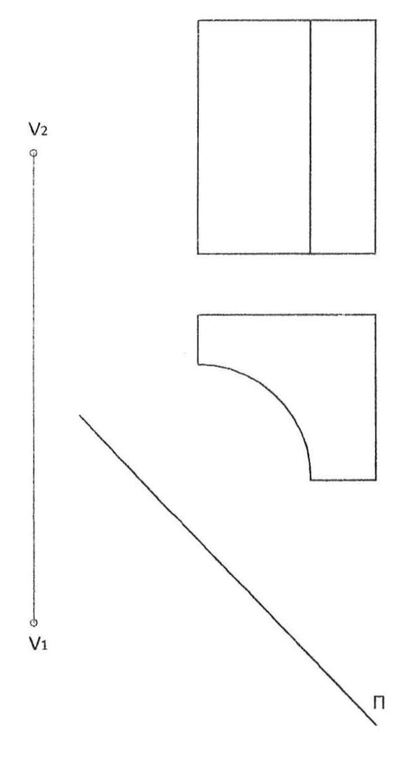
lh

Dibujar en perspectiva un prisma recto de 60m de altura y base hexagonal de la que se conoce el diámetro AB=30m (Escala 1/1000).

A'

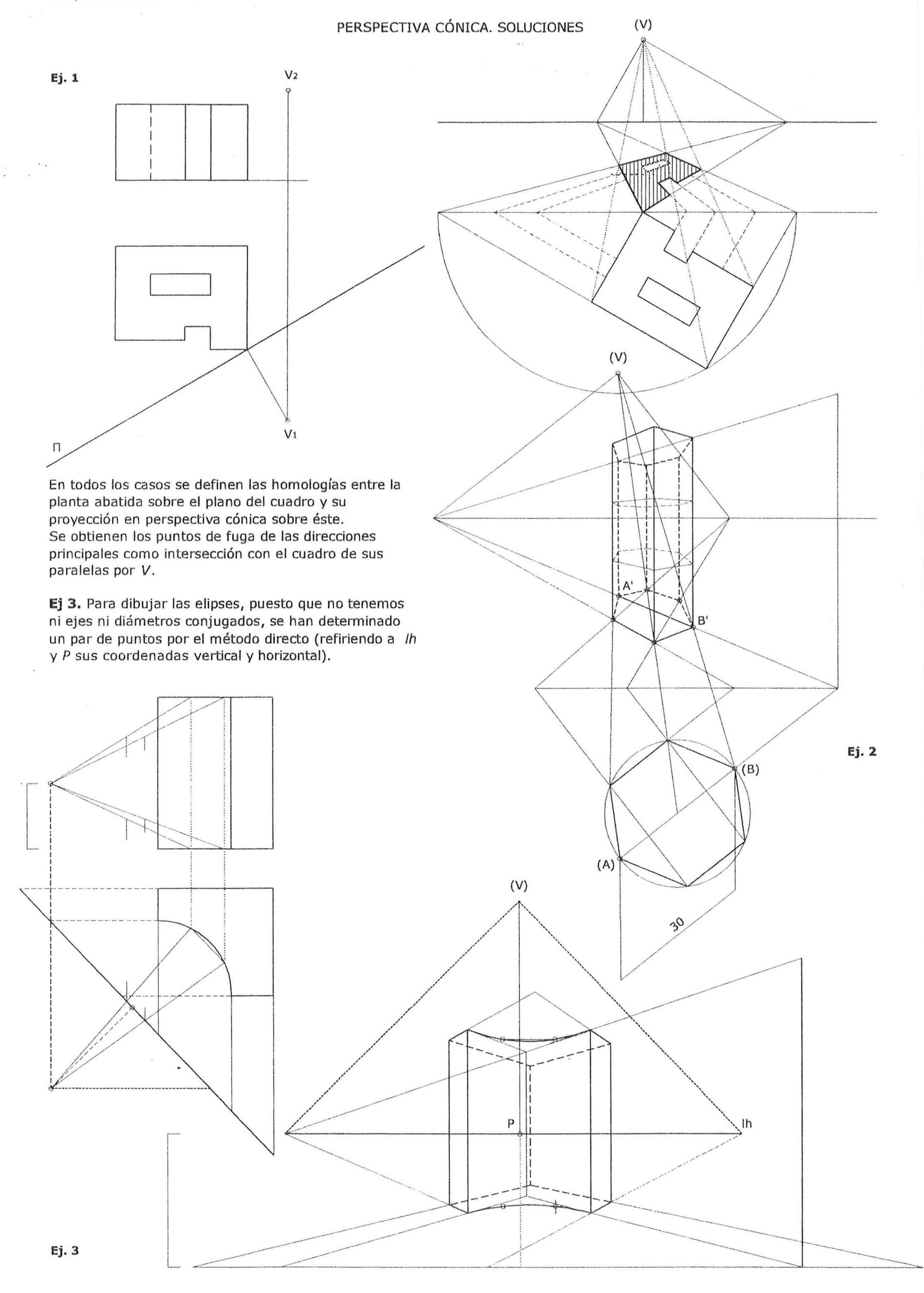
B'

Dibujar en perspectiva el edificio dado, duplicando el valor de todas las medidas para obtener una imagen de un tamaño razonable.



P

PERSPECTIVA CÓNICA. SOLUCIONES



En todos los casos se definen las homologías entre la planta abatida sobre el plano del cuadro y su proyección en perspectiva cónica sobre éste.
Se obtienen los puntos de fuga de las direcciones principales como intersección con el cuadro de sus paralelas por *V*.

Ej 3. Para dibujar las elipses, puesto que no tenemos ni ejes ni diámetros conjugados, se han determinado un par de puntos por el método directo (refiriendo a *lh* y *P* sus coordenadas vertical y horizontal).

6. Abatimiento y verdadera magnitud en diédrico

Distancia entre dos puntos (fig. 1)

Para determinar la distancia entre dos puntos, basta abatir uno de los planos proyectantes que los contienen.
Se puede hacer sobre cualquier plano, pero resulta muy cómodo abatir sobre los horizontales o frontales.

- En el primer caso, se toma el plano vertical que contiene a los puntos: la distancia es hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como catetos la proyección horizontal del segmento y su diferencia de cotas.
- Análogamente, para abatir sobre planos frontales los catetos serán: la proyección vertical del segmento y la diferencia de alejamientos (distancias al plano frontal).

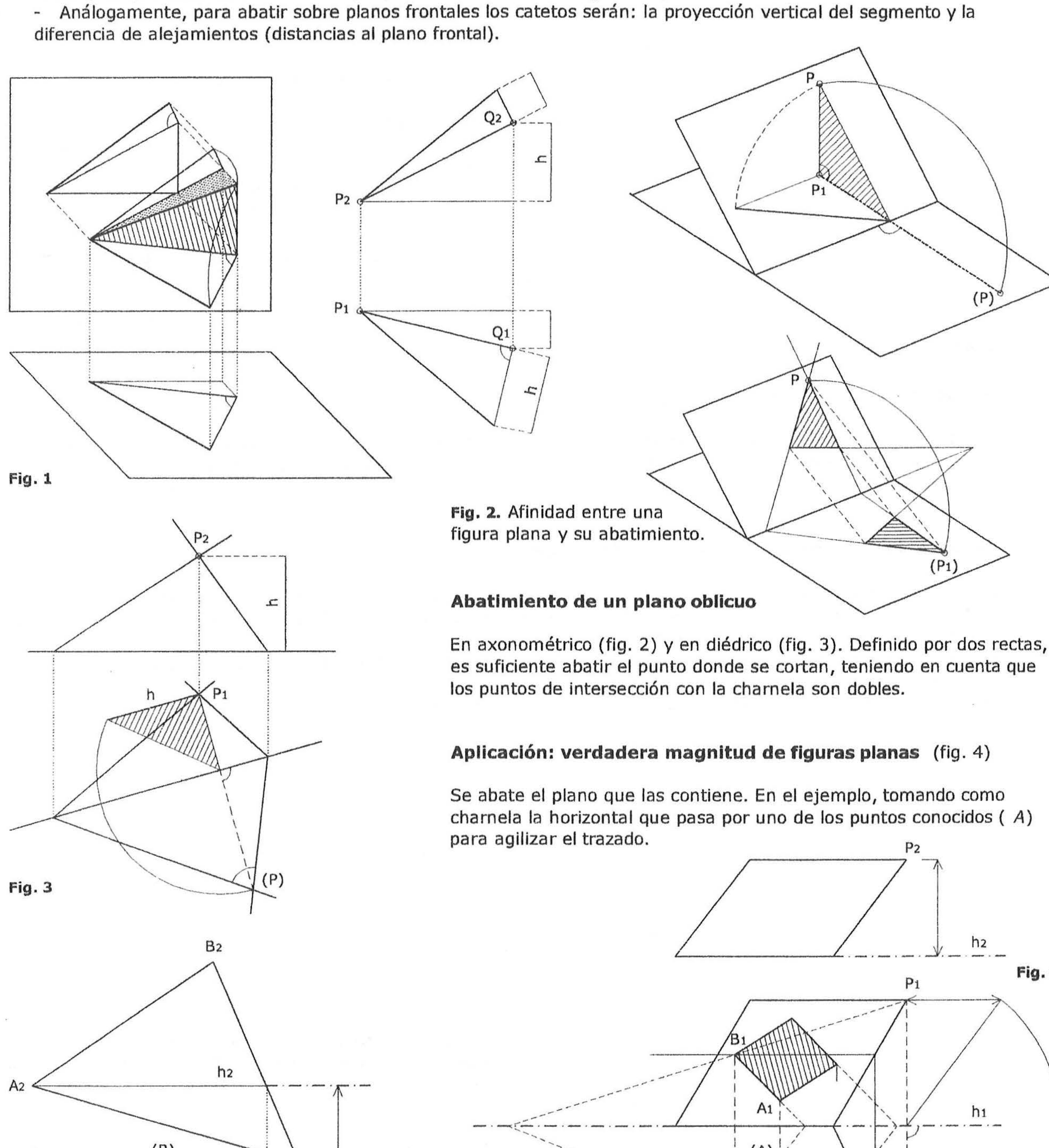


Fig. 1

Fig. 2. Afinidad entre una figura plana y su abatimiento.

Abatimiento de un plano oblicuo

En axonométrico (fig. 2) y en diédrico (fig. 3). Definido por dos rectas, es suficiente abatir el punto donde se cortan, teniendo en cuenta que los puntos de intersección con la charnela son dobles.

Aplicación: verdadera magnitud de figuras planas (fig. 4)

Se abate el plano que las contiene. En el ejemplo, tomando como charnela la horizontal que pasa por uno de los puntos conocidos (*A*) para agilizar el trazado.

Fig. 3

Fig. 5

Fig. 4. Verdadera magnitud de *ABC*.

Ejercicios resueltos

1. Situación de un cuadrado de lado *AB* sobre un plano (fig. 5).
   1. Con charnela h_1 se abate un punto *(P)* sobre el plano horizontal por *h*;
   2. Afinidad entre la proyección horizontal y el abatimiento: Puntos homólogos *P* y *(P)*; eje h_1.

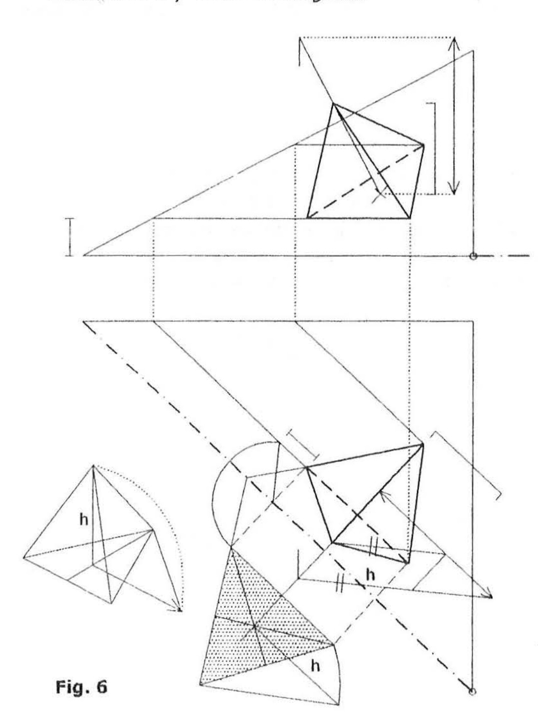


Fig. 6

2. Tetraedro con una cara apoyada en un plano oblicuo (fig. 6).

Conocida una arista horizontal, utilizamos la recta que la contiene como charnela para abatir sobre un plano horizontal.
Se sitúa la cara contenida en el plano y a continuación se traza la recta perpendicular a él con pie en el centro de la cara (sus proyecciones horizontal y vertical son perpendiculares a las horizontales y frontales del plano respectivamente).
Tras hallar gráficamente la dimensión de la altura del tetraedro (*h*) se puede utilizar el propio abatimiento para medir sobre la perpendicular.

Secciones planas y verdadera magnitud

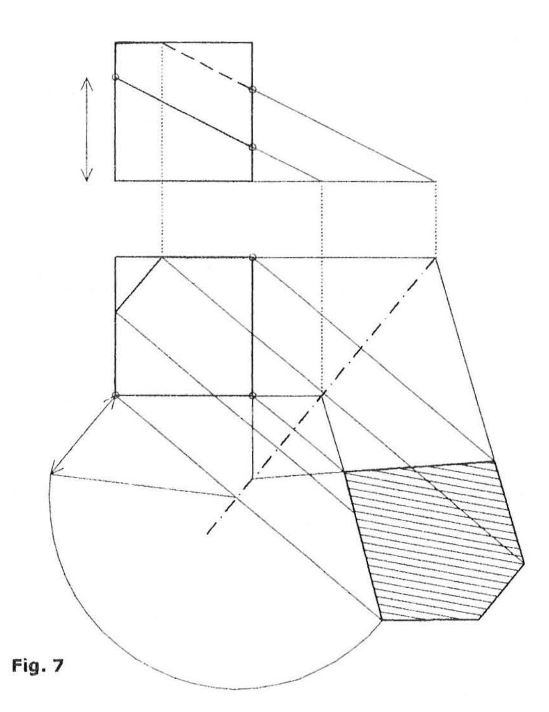
Cualquier sección plana de un poliedro o sólido de caras igualmente planas se obtiene fácilmente hallando la intersección de sus aristas con el plano secante.
El objeto de este cuaderno no es explicar cómo hacerlo, por lo que apenas vamos a comentar algunos casos elementales. Sí queremos sin embargo insistir en la definición de las transformaciones homológicas que existen entre las secciones y sus proyecciones, que permiten conocer la verdadera magnitud de las secciones sin ni tan siquiera tener que dibujar más que una de las proyecciones (basta conocer las proyecciones de un solo punto para definir la afinidad correspondiente).

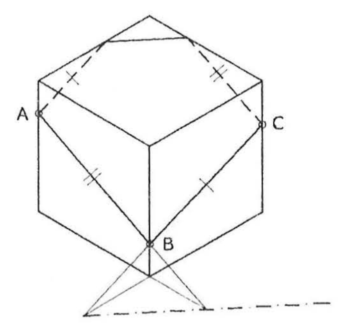
Sección por un plano definido por tres puntos

En fig. 7 hemos hallado la intersección del plano con un triedro de direcciones paralelas a las de las caras principales de un hexaedro. No necesariamente tiene que contener caras de éste para ser igualmente válido.
Para ello se determinan las trazas de dos rectas cualesquiera del plano secante con el triedro dado.

Interpretación en perspectiva axonométrica y diédrico

Para obtener secciones resulta muy útil trabajar con planos proyectantes (perpendiculares a los de proyección). La intersección de una recta con un plano se obtiene tomando el plano vertical o de canto que la contiene y hallando su intersección con el plano secante, que es inmediata.
En todo caso, conviene no olvidar que las secciones producidas en planos paralelos son paralelas, y para mayor rapidez, trabajar con caras en vez de aristas siempre que sea posible.
Las operaciones a seguir son iguales en diédrico que en axonométrico.


Fig. 7



Ejercicios resueltos (figs. 7 y 8). Determinar, tanto en diédrico como en axonométrico, la sección de cada una de las piezas dadas por el respectivo plano definido por los puntos *A*, *B* y *C*.

Si los puntos pertenecen a caras del prisma, proporcionan las direcciones de las secciones de todas las paralelas a éstas (*AB* y *BC* en fig. 7).
La correspondiente a otras caras se obtiene hallando las trazas de dos de las rectas determinadas por los puntos dados con un plano paralelo a ellas (en este caso, las horizontales).

La verdadera magnitud se ha obtenido en sistema diédrico, abatiendo las caras de la pieza sobre un plano horizontal. La charnela o eje del abatimiento puede estar situada a cualquier cota; no hay por qué abatir sobre el plano de la base de una pieza sino sobre aquel que convenga al dibujo (en el segundo ejercicio se ha utilizado el de la cara superior del cubo, con lo que la charnela es la propia sección horizontal en esta cara).

El segundo ejemplo (fig. 8) puede resolverse también directamente, puesto que la recta *AC* es paralela a dos caras del cuerpo.

1.- Se obtiene el punto *1* trazando por *B* una paralela a *AC*.
2.- La recta *1C* define la dirección de las horizontales, con lo que obtenemos *2* trazando por *A* una paralela a *1C*.
3.- Paralela a *B1* por *2* para completar la sección.

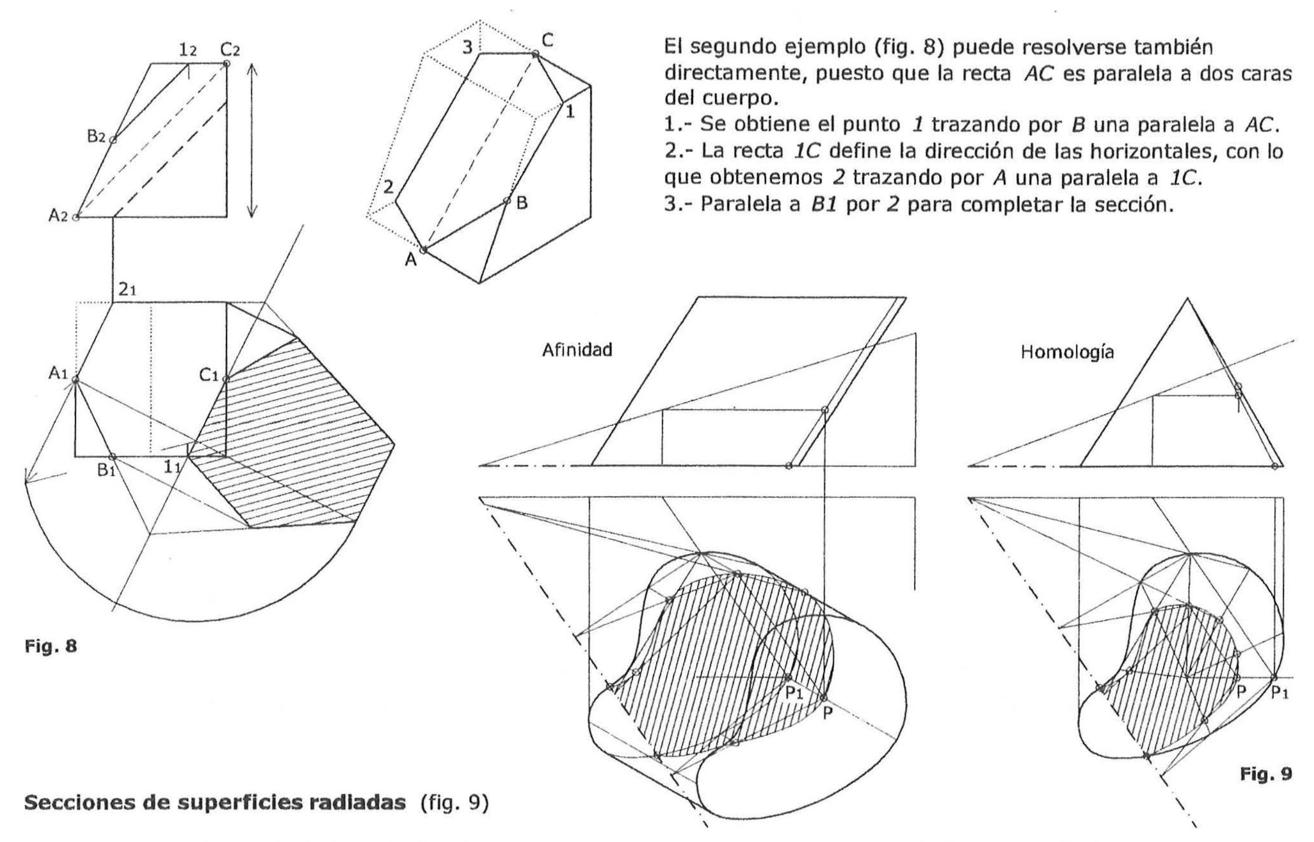


Fig. 8

Fig. 9

Secciones de superficies radiadas (fig. 9)

Utilizando respectivamente la homología o la afinidad podemos determinar por puntos de forma sencilla la sección plana de cualquier superficie cónica o cilíndrica, independientemente de que su directriz sea o no una linea regular. Y a partir de la proyección obtenida podríamos igualmente dibujar su verdadera magnitud por afinidad.

Desarrollos

Mediante abatimientos se puede igualmente determinar fácilmente el desarrollo de cuerpos limitados por caras planas.

Ejercicio resuelto. Hallar el desarrollo del tronco de pirámide dado (fig. 10).
Se trata de un ejemplo en el que la arista *h* es horizontal, lo que representa una simplificación que permite abatir directamente las caras que convergen en ella (en el ejemplo se ha hecho con la mayor). El resto del desarrollo se obtiene definiendo las afinidades correspondientes y teniendo en cuenta que la longitud de cada arista común es la misma en los abatimientos de las caras que coinciden en ella. En este caso, debido a la simplicidad del modelo sólo es necesaria una de las afinidades.

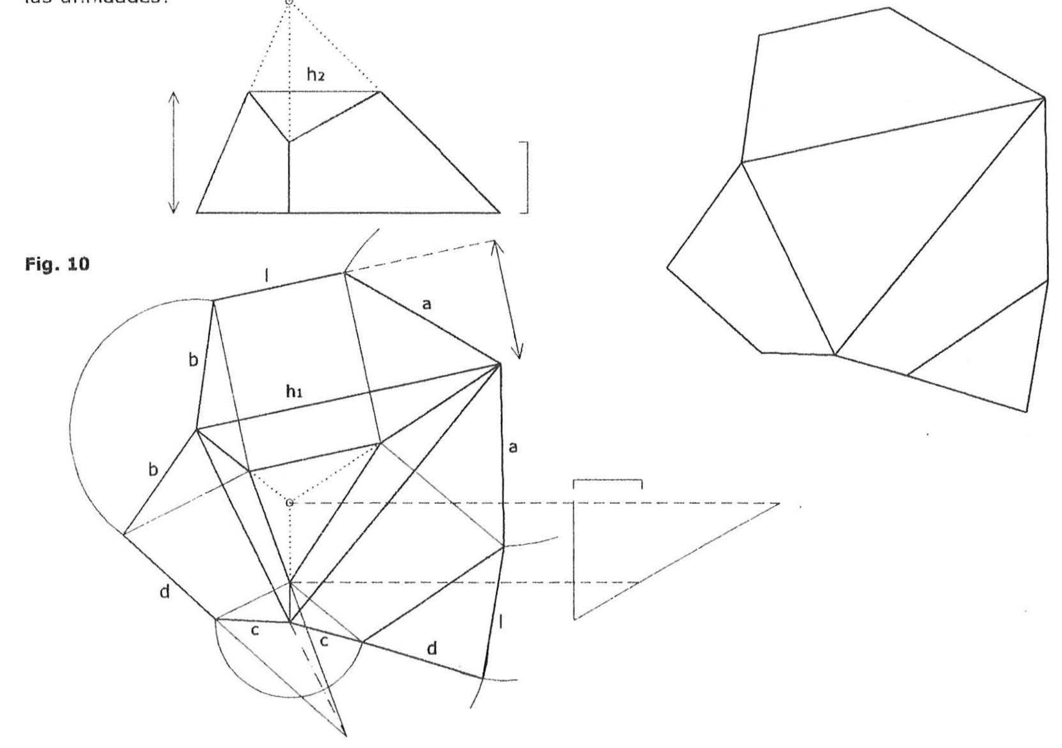
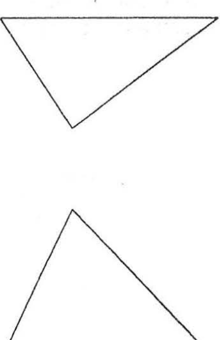
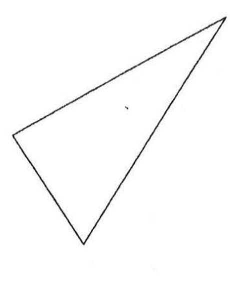


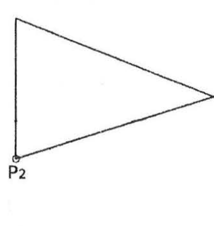
Fig. 10

ABATIMIENTOS Y SECCIONES. EJERCICIOS

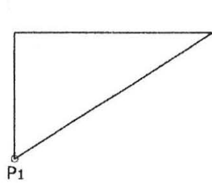
Determinar mediante abatimiento la forma en verdadera magnitud de los triángulos dados. Inscribir en uno de ellos un triángulo equilátero y en otro un cuadrado.

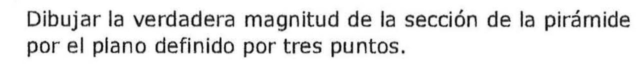




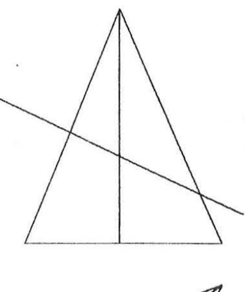


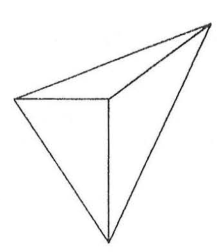




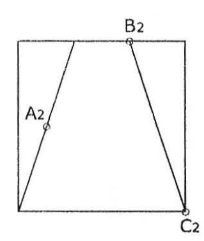


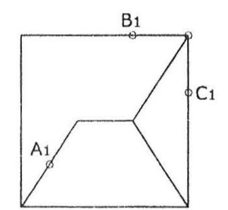
Verdadera magnitud de la sección de la pirámide por el plano proyectante dado.



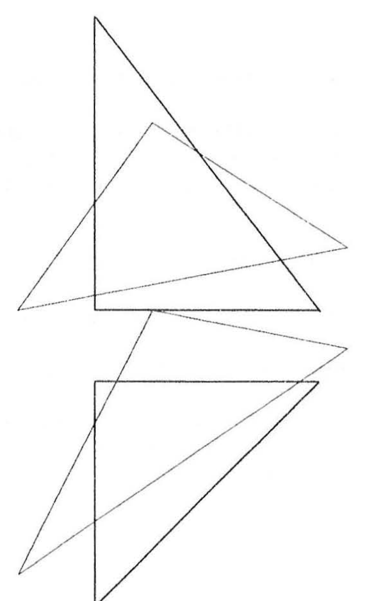


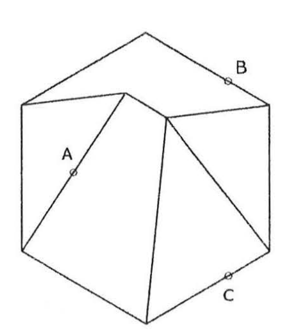
Sección y verdadera magnitud del sólido por el plano definido por los tres puntos dados.





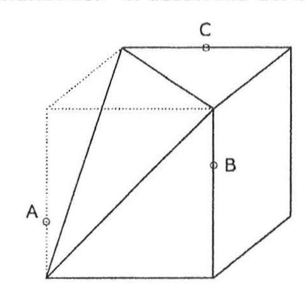
Dibujar la verdadera magnitud de la sección de la pirámide por el plano definido por tres puntos.

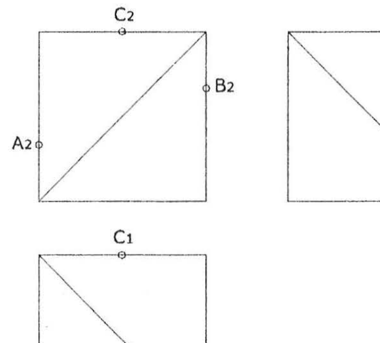


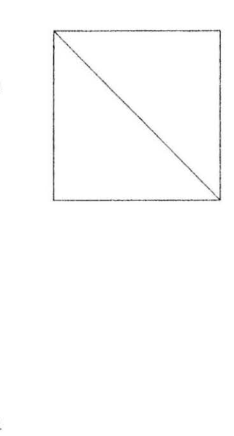


DESARROLLOS. EJERCICIOS

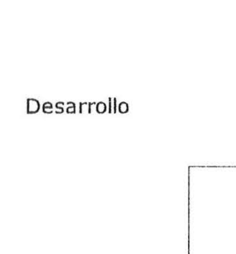
Determinar la sección producida en el sólido por el plano definido por los puntos *A*, *B* y *C*.
Dibujar a continuación el desarrollo del cuerpo resultante.



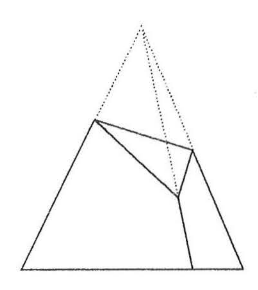


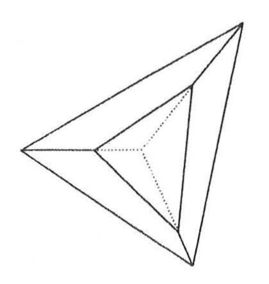


Desarrollo



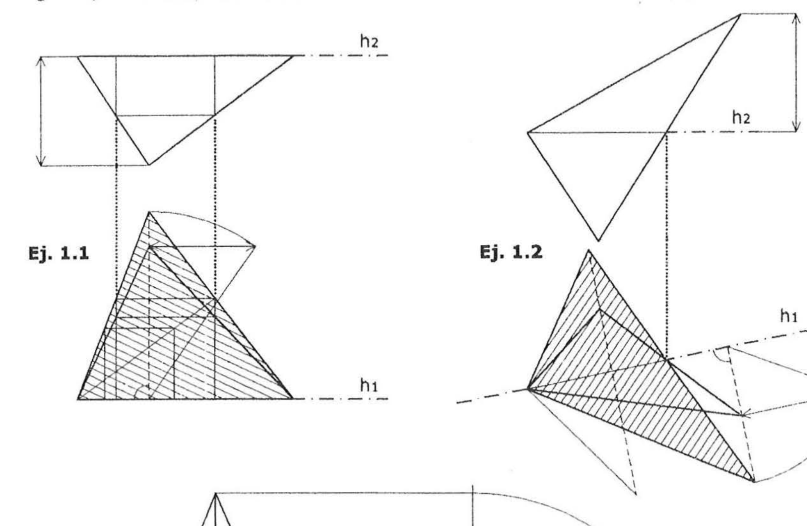
Desarrollo del tronco de pirámide.

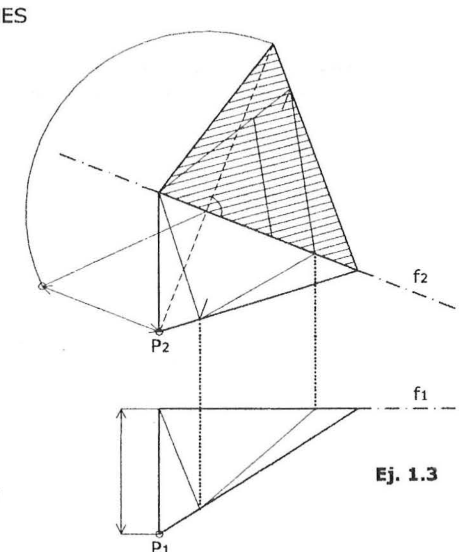


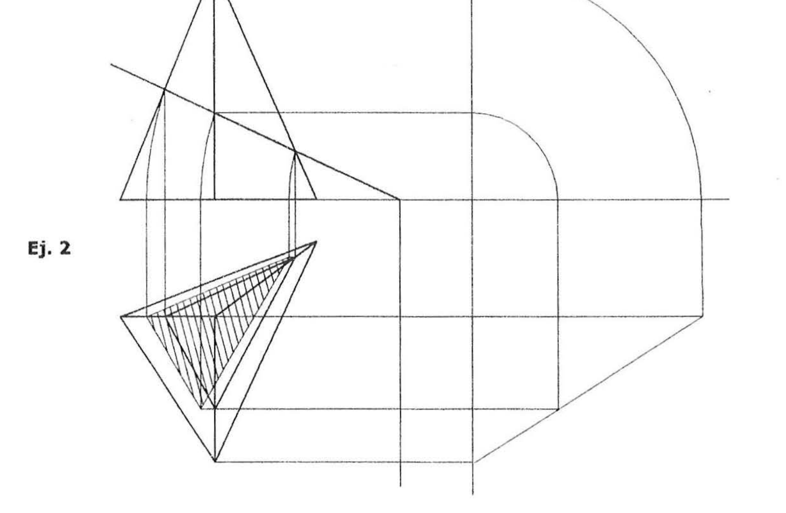


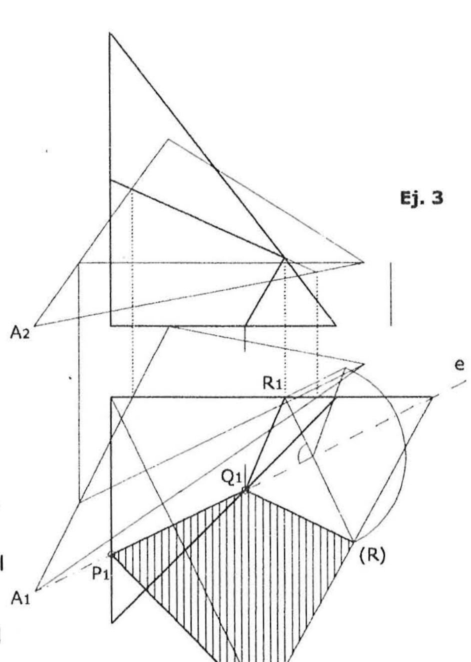
ABATIMIENTOS Y SECCIONES. SOLUCIONES

1.3. El lado de perfil invita a abatir sobre un plano frontal (charnela *f*). Igual que en 1.1, es suficiente hallar el transformado de un solo punto.







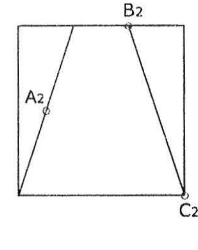


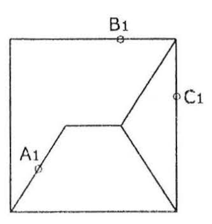
3. Sección: Horizontal del plano (dirección del eje del abatimiento).

El punto *A* está contenido en el plano de la base de la pirámide: trazamos por él una horizontal obteniéndose los puntos *P* y *Q* de la sección.

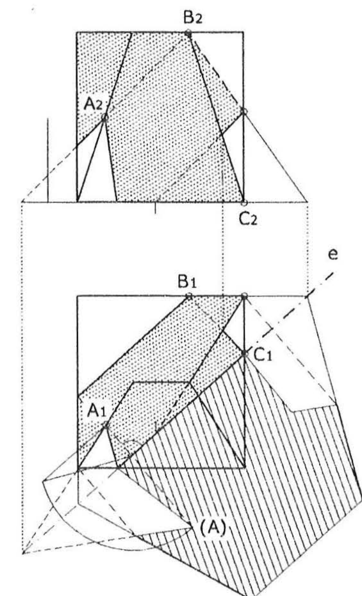
Intersección de la cara frontal de la pirámide con el plano secante utilizando el plano frontal que la contiene: se localizan los puntos *R* y *S*.

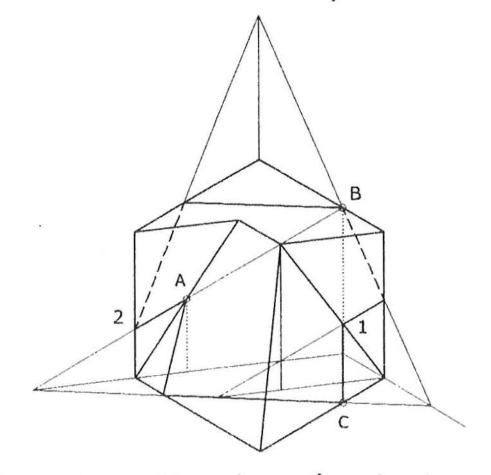
Abatimiento: Charnela horizontal por *PQ*. Se abate *R* y a partir de él se dibuja el resto de la sección por afinidad de eje *e* y par de homólogos *R1* y *(R)*.





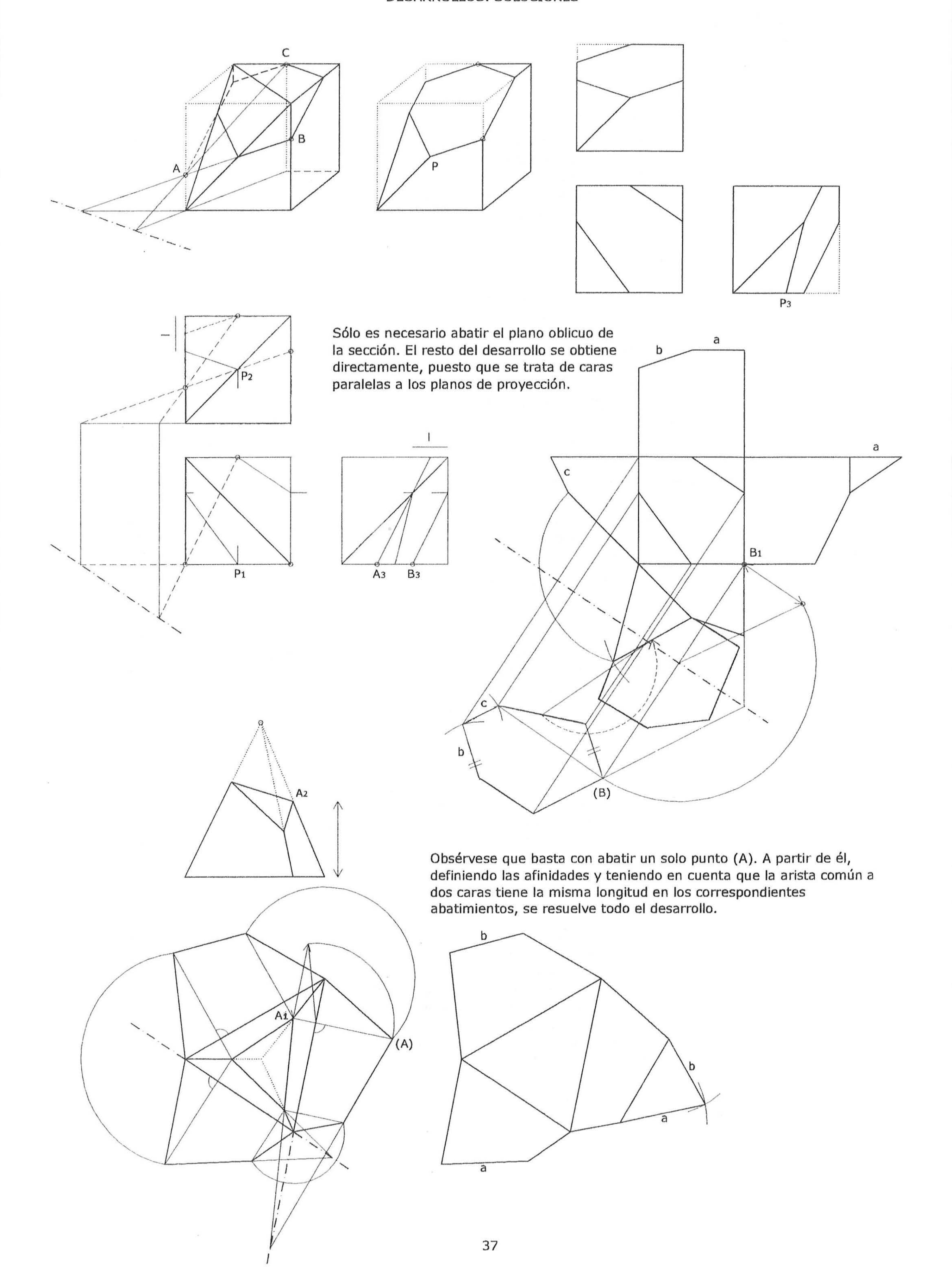
Ej. 4





4. Recta *AB* para obtener la sección en los planos horizontales (uniendo *C* con la traza en la base y paralela por *B* en la tapa). Recta *BC* para obtener punto *1* (*2* es directo por ser *AB* cara de la pieza).

DESARROLLOS. SOLUCIONES



Sólo es necesario abatir el plano oblicuo de la sección. El resto del desarrollo se obtiene directamente, puesto que se trata de caras paralelas a los planos de proyección.

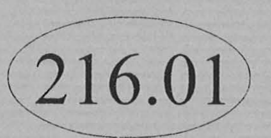
Obsérvese que basta con abatir un solo punto (A). A partir de él, definiendo las afinidades y teniendo en cuenta que la arista común a dos caras tiene la misma longitud en los correspondientes abatimientos, se resuelve todo el desarrollo.

Índice

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

84-9728-200-0

